

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Міністерство освіти і науки України

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Зражевська Наталія Григорівна

УДК 303.732.4:519.6

ДИСЕРТАЦІЯ

Методи і моделі прогнозування мір динамічних фондових ризиків

01.05.04 – Системний аналіз і теорія оптимальних рішень

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук.

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ Зражевська Н.Г.

Науковий керівник: **Панкратова Наталія Дмитрівна**, член-кореспондент
Національної академії наук України, доктор технічних наук, професор

Київ – 2018

АНОТАЦІЯ

Зражевська Н.Г. Методи і моделі прогнозування мір динамічних фондових ризиків. - Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.04 «Системний аналіз і теорія оптимальних рішень» (124–Системний аналіз). – Інститут прикладного системного аналізу Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, Київ, 2018.

У роботі пропонується системний підхід до моделювання і прогнозування мір динамічних і статичних ризиків VaR і CVaR, які є найпоширенішими мірами, що використовуються при оцінюванні фінансових ризиків, перш за все ризиків фондових бірж.

Системний підхід складається з двох основних етапів. На *першому етапі* відбувається вибір методу моделювання мір динамічних ризиків. Для полегшення процесу вибору, базуючись на проведеному у роботі аналізі відомих методів оцінювання VaR і CVaR, у роботі запропоновано класифікаційну схему сучасних методів оцінювання мір динамічних ризиків і структурну схему вибору методу оцінювання мір VaR і CVaR, що найкраще відповідає вхідним даним.

В разі, якщо аналіз даних підтверджує волатильність часового ряду і властивість сильної залежності його квадратів, на *другому етапі* системного підходу запропоновано новий метод прогнозування мір динамічних ризиків VaR і CVaR з урахуванням сильної залежності – Метод Згладжування Автокореляційної Функції (МЗАКФ).

Розглядається часовий ряд $\{X_t, t \in T\}$ зі скінченним середнім, який задається своїми спостереженнями у відповідні моменти часу: X_1, \dots, X_N . Вважається, що часовий ряд $\{X_t^2, t \in T\}$ є слабо стаціонарним з властивістю

сильної залежності. За МЗАКФ для моделювання часового ряду з метою врахування властивості сильної залежності використовується модель FIGARCH(p,d,q):

$$X_t = \mu + \varepsilon_t = \mu + \sigma_t Z_t, (1 - \beta(L))\sigma_t^2 = \omega + (1 - \beta(L) - \varphi(L)(1 - L)^d)\varepsilon_t^2,$$

де μ середнє, σ_t умовна дисперсія, задана на інформаційній множині, що містить всю відому на момент часу t інформацію про ряд, Z_t незалежні, однаково розподілені випадкові величини (iid) з середнім 0 і дисперсією 1,

$$LX_t = X_{t-1}, \quad \alpha(L) = \sum_{i=1}^q a_i L^i, \quad \beta(L) = \sum_{j=1}^p b_j L^j, \quad \varphi(L) \equiv (1 - \alpha(L) - \beta(L))(1 - L)^{-1},$$

$$(1 - L)^d = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(-d)\Gamma(j+1)} (-L)^j \quad - \text{оператор дробової різниці, } (\Gamma(\cdot) - \text{гамма}$$

функція), $d \in (0, 1/2)$; $\omega > 0$; $a_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, q$; $b_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, p$;

$\sum_{i=1}^q a_i + \sum_{j=1}^p b_j < 1$. Після видалення тренду з ряду даних, модель для мір

ризиків може бути записана у вигляді: $VaR_{\alpha}^t = VaR_{\alpha}(Z)\sigma_t$,

$CVaR_{\alpha}^t = CVaR_{\alpha}(Z)\sigma_t$. Прогнозні значення мір ризику на P кроків вперед

можуть бути знайдені по екстраполяції моделі: $VaR_{\alpha}^{t+P} = VaR_{\alpha}(Z)\sigma_{t+P}$,

$$CVaR_{\alpha}^{t+P} = CVaR_{\alpha}(Z)\sigma_{t+P}.$$

Для моделювання дисперсії, відповідно до запропонованого у роботі методу, FIGARCH(p,d,q) записується як модель $AR(\infty)$ для квадратів процесу ε_t^2 :

$$\varepsilon_t^2 = (1 - \beta(1))^{-1}\omega + \lambda(L)\varepsilon_t^2 + v_t,$$

де $\lambda(L) \equiv 1 - (1 - \beta(1))^{-1}\varphi(L)(1 - L)^d = \lambda_1 L + \lambda_2 L^2 + \lambda_3 L^3 + \dots$, $v_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$ або

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + v_t. \quad \text{Для знаходження оцінок коефіцієнтів авторегресії}$$

$\vec{\alpha} = (\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_K)'$ треба знайти розв'язок нескінченної системи Юла-Уокера:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \rho_{|i-j|} \alpha_j = \rho_i, \quad i = 1, \dots, \infty. \quad \text{Враховуючи асимптотичну поведінку}$$

автокореляційної функції (АКФ) в силу сильної залежності, можна знайти наближений розв'язок редукованої системи $\sum_{j=1}^K \hat{\rho}_{|i-j|} \alpha_j = \hat{\rho}_i, i = 1, \dots, K$, який буде збігатися до точного при $K \rightarrow \infty$. Особливість нового методу полягає в тому, що в системі рівнянь Юла-Уокера замість коефіцієнтів автокореляції, побудованих на спостережуваних значеннях часового ряду, використовуються значення АКФ, знайдені по запропонованій у роботі моделі АКФ. Для моделювання АКФ пропонується метод згладжування АКФ на основі оптимізаційної процедури. Базуючись на регресійному рівнянні для АКФ, що впливає з означення сильної залежності: $\rho_k = \gamma_1 H(2H-1)k^{2H-2} + \gamma_2 + \varepsilon_k$, ε_k -iid, метод дозволяє в результаті розв'язання оптимізаційної задачі знайти оцінки коефіцієнтів рівняння $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2$ і уточнити значення параметра Херста \hat{H}_{opt} . Побудована за новим методом модель АКФ дозволяє найбільш точно описати поведінку АКФ для великих значень аргументу і, таким чином, отримати оптимальну модель для прогнозування.

Інформаційні критерії використовуються для знаходження порядку авторегресії $AR(M)$ ($M \leq K$). Таким чином, оцінки дисперсії і прогнозні значення дисперсії знаходяться, відповідно, за формулами: $\hat{\sigma}_t^2 = \hat{a}_0 + \sum_{i=1}^M \hat{a}_i \hat{\sigma}_{t-i}^2$, $t = 1, \dots, N+1$, $\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \hat{a}_0 + \sum_{i=1}^M \hat{a}_i \hat{\sigma}_{t+1-i}^2$, $t = N+1, \dots$

Знайдені оцінки дисперсії використовуються для знаходження мір статичних ризиків для залишків моделі $\widehat{VaR}_\alpha(Z)$, $\widehat{CVaR}_\alpha(Z)$. Вибір методів оцінювання статичних ризиків здійснюється з використанням запропонованих у роботі класифікаційних схем.

Отримана модель дисперсії і оцінки мір статичних ризиків використовуються для знаходження прогнозних оцінок мір динамічних ризиків. Для побудови прогнозу використовується прямий багатокроковий (на P кроків вперед) метод прогнозування, вікно з накопиченням.

Всі етапи системного підходу було апробовано на штучно змодельованих і реальних часових рядах логарифмічної дохідності індексів різних фондових бірж за період з 2005 по 2015 роки. Для демонстрації ефективності застосування схеми вибору методу оцінювання мір динамічних ризиків знайдено оцінки VaR і CVaR для часових рядів логарифмічної дохідності на денній основі двох азіатських фондових індексів – японського індексу Nikkei 225 Stock Index (часовий ряд N225) та китайського композитного індексу CSI 300 Index ETF (CNY). Оптимізаційний метод згладжування АКФ та прогнозування дисперсії часового ряду по запропонованому у роботі методі на основі моделі FIGARCH було апробовано на часовому ряді даних індексу фондової біржі "Российская Торговая Система". Проведений кількісний і якісний аналізи отриманих оцінок підтвердили ефективність запропонованих у роботі схем.

Побудова прогнозних оцінок мір ризиків за МЗАКФ була виконана для часового ряду N225, що характеризується відносно низькою волатильністю. Для порівняння, для отримання прогнозних оцінок використовувався стандартний метод, в якому прогнозування дисперсії здійснювалося по авторегресійній моделі в припущенні нормального розподілу залишків. Порівняння прогнозних значень з реальними даними дозволило зробити висновок: похибки прогнозів, побудованих за МЗАКФ, в основному менше похибок прогнозів, знайдених за стандартним методом. Таким чином, МЗАКФ дав можливість отримати якісний прогноз для часового ряду, що відображає стабільну поведінку фондового ринку.

Запропонований у роботі системний підхід було застосовано для отримання прогнозних значень мір ризиків для часових рядів різної волатильності. В якості даних розглядалися три часових ряди логарифмічної дохідності на денній основі, отримані на основі індексу Nasdaq-100. Аналіз отриманих прогнозів приводить до висновку, що системний підхід із

застосуванням МЗАКФ дозволив отримати якісний прогноз мір динамічних ризиків для всіх трьох рядів з різною волатильністю.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: міри ризиків VaR і CVaR, сильна залежність, прогнозування дисперсії, моделювання автокореляційної функції, метод згладжування автокореляційної функції.

ANNOTATION

Zrazhevskaya N. G. Methods and models of dynamic stock risk measures forecasting. – Manuscript copyright.

The thesis for candidate degree of technical science on speciality 01.05.04 – "System analysis and the theory of optimal solutions" (124–System analysis). – National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute" MSE of Ukraine, Kyiv, 2018.

Dissertation proposes a systematic approach to the VaR and CVaR modeling and forecasting for dynamic and static risks, which are the most commonly measures used for financial risks (primarily stock market risks).

The system approach consists of two main stages. At the first stage, the choice of the method of dynamic risk measuring modeling is taken. In order to facilitate the selection process the dissertation proposes a classification scheme of modern methods for estimation of measures of dynamic stock risks and a structural scheme for choosing a method for VaR and CVaR measures estimation that best fit the input data.

If the data analysis confirms the time series volatility and the property of the strong dependence of its squares, at the second stage of the system approach a new method for the dynamic VaR and CVaR forecasting is proposed – Method of smoothing of the autocorrelation function (MSACF).

The time series $\{X_t, t \in T\}$ with finite mean, which is given by its observations at the appropriate moments of time: X_1, \dots, X_N is considered. It is

assumed that the time series $\{X_t^2, t \in T\}$ is weakly stationary with the property of strong dependence.

By the MSACF in order to take into account the property of strong dependence, the FIGARCH(p,d,q) model is used for the time series modeling:

$$X_t = \mu + \varepsilon_t = \mu + \sigma_t Z_t, \quad (1 - \beta(L))\sigma_t^2 = \omega + (1 - \beta(L) - \varphi(L)(1 - L)^d)\varepsilon_t^2,$$

where μ denotes the mean, σ_t denotes the conditional variance, defined on an information set that contains all the information known at the time t of the time series, Z_t are independent, identically distributed random variables with mean 0

and variance 1, $LX_t = X_{t-1}$, $\alpha(L) = \sum_{i=1}^q a_i L^i$, $\beta(L) = \sum_{j=1}^p b_j L^j$,

$\varphi(L) \equiv (1 - \alpha(L) - \beta(L))(1 - L)^{-1}$, $(1 - L)^d = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(-d)\Gamma(j+1)} (-L)^j$ is a fractional

difference operator, ($\Gamma(\cdot)$ -gamma function), $d \in (0, 1/2)$; $\omega > 0$; $a_i \geq 0$,

$i=1,2,\dots,q$; $b_j \geq 0$, $j=1,2,\dots,p$; $\sum_{i=1}^q a_i + \sum_{j=1}^p b_j < 1$. After removing the trend

from the data series, the model for risk measures can be written as:

$VaR_{\alpha}^t = VaR_{\alpha}(Z)\sigma_t$, $CVaR_{\alpha}^t = CVaR_{\alpha}(Z)\sigma_t$. The predicted values of risk measures

for P steps forward can be found by the model extrapolation:

$$VaR_{\alpha}^{t+P} = VaR_{\alpha}(Z)\sigma_{t+P}, \quad CVaR_{\alpha}^{t+P} = CVaR_{\alpha}(Z)\sigma_{t+P}.$$

For variation modeling according to the method proposed in the dissertation, FIGARCH(p,d,q) is written as AR(∞) model for the squares of the process ε_t^2 :

$$\varepsilon_t^2 = (1 - \beta(1))^{-1} \omega + \lambda(L)\varepsilon_t^2 + v_t,$$

where $\lambda(L) \equiv 1 - (1 - \beta(1))^{-1} \varphi(L)(1 - L)^d = \lambda_1 L + \lambda_2 L^2 + \lambda_3 L^3 + \dots$, $v_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$ or

$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + v_t$. To find the estimates of the autoregressive coefficients

$\vec{\alpha} = (\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_K)'$ it is necessary to solve the infinite system of Yule-Walker

equations: $\sum_{j=1}^{\infty} \rho_{|i-j|} \alpha_j = \rho_i$, $i=1, \dots, \infty$. Taking into account the asymptotic behavior

of the autocorrelation function (ACF) due to long-range dependence, an approximate solution of the reduced system $\sum_{j=1}^K \hat{\rho}_{|i-j|} \alpha_j = \hat{\rho}_i, i=1, \dots, K$ can be found and this solution converges to the exact solution at $K \rightarrow \infty$. Feature of the new method is that the coefficients of the Yule-Walker system are found by the ACF model, proposed in the work.

For the ACF modeling, the method of smoothing of the ACF, based on the optimization procedure, is used. The method uses the regression equation for ACF, which follows from the definition of long-range dependence: $\rho_k = \gamma_1 H(2H-1)k^{2H-2} + \gamma_2 + \varepsilon_k$, ε_k -iid. Solving of the optimization problem allows to find estimates of the coefficients $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2$ and to refine the value of the long-range dependence parameter (the Hurst parameter) \hat{H}_{opt} . The ACF model, built on the new method, makes it possible to describe the behavior of ACF for large values of the argument more accurately and thus to obtain the optimal model for forecasting.

Information criteria are used to determine the order of the autoregression $AR(M)$ ($M \leq K$). Thus, the variance estimates and the predicted values of

variation can be found by formulas: $\hat{\sigma}_t^2 = \hat{a}_0 + \sum_{i=1}^M \hat{a}_i \hat{\sigma}_{t-i}^2, t=1, \dots, N+1$,

$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \hat{a}_0 + \sum_{i=1}^M \hat{a}_i \hat{\sigma}_{t+1-i}^2, t=N+1, \dots$. These estimates are used to find static risk

measures for the model residuals $\widehat{VaR}_\alpha(Z), \widehat{CVaR}_\alpha(Z)$. The choice of a method for static risk measures estimation is performed using the proposed in the work classification schemes.

The obtained variance model and assessment of static risk measures are used to find forecasting values for dynamic risk measures. To build the forecast, a straightforward multi-step (P steps forward) prediction method is used with the accumulation window.

All stages of the system approach were tested on artificially modeled and real time series of logarithmic returns of indices of different stock exchanges for the period from 2005 to 2015.

To demonstrate the use of the scheme for choosing a method for dynamic risk measures VaR and CVaR estimating two time series of logarithmic returns on a daily basis of two Asian stock indices – the Nikkey 225 Stock Index (N225 time series) and the CSI 300 Index ETF (CNY), were considered. The optimization method of ACF smoothing and the variance prediction by the method proposed in the dissertation were tested on the time series of Russian Trading System stock market index. The quantitative and qualitative analyzes of the obtained estimates confirmed the effectiveness of the new methods.

The MSACF was used to get the predictive estimates of risk measures for N225 time series with low volatility. For comparison, a standard method, based on the autoregressive model with a normal distribution of residues was used. Comparison of predicted values with real data allows to conclude that forecast errors for MSACF are much less than the forecast errors for the standard method. Thus, the MSACF made it possible to obtain high-quality forecast estimates for time series, that shows a stable behavior of a stock market.

The proposed system approach was applied to obtain risk measures forecast estimates for time series with different volatility. Three time series on the basis of the Nasdaq-100 index of daily log return were considered. The analysis of the obtained forecast estimates allows to make a conclusion that the system approach using the MSACF allows to get a qualitative forecast of dynamic risks measures for all three time series with different volatility.

KEYWORDS: VaR and CVaR risk measures, long memory, variance forecasting, autocorrelation function modeling, Method of smoothing of the autocorrelation function.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. N. D. Pankratova, and **N. G. Zrazhevskaja**, “Model of Autocorrelative Function of Time Series with Strong Dependence”, *Journal of Automation and Information Sciences*, vol. 47, no. 10, pp. 1-12, 2015. (Входить до наукометричної бази *ISI Thompson Science Citation Index, CAS, SCOPUS, PubMed, CrossRef* та ін.). Дисертантом запропоновано формалізацію, математичне обґрунтування і чисельну апробацію методу для моделювання АКФ на основі регресійного рівняння, параметри якого знаходяться з використанням оптимізаційної процедури.
2. **Н.Г. Зражевська**, “Метод згладженої автокореляційної функції для прогнозування варіації гетероскедастичних часових рядів”, *Системні дослідження та інформаційні технології*, no.3. с. 97-108, 2015. (Входить до наукометричних баз *DOAJ, Index Copernicus, РИНЦ* та ін.)
3. **N. G. Zrazhevskaja**, and A. G. Zrazhevskij, “Classification of methods for risk measures VaR and CVaR calculation and estimation”, *Системні дослідження та інформаційні технології*, no.3. с. 118-125, 2016. (Входить до наукометричних баз *DOAJ, Index Copernicus, РИНЦ* та ін.). Дисертантом виконана побудова процедури прийняття рішення щодо вибору методу оцінювання статичних мір ризику, формалізація і чисельна апробація класифікаційної схеми оцінювання *VaR* та *CVaR*.
4. **N. Zrazhevskaja**, “Construction and application of the classification scheme of dynamic risk measures estimating”, *Eureka: Physics and Engineering*, no.5, pp. 67-80, 2016, DOI: 10.21303/2461-4262.2016.00162. (Входить до наукометричних баз *Worldcat, JIF, DRJI, I2OR, SIS, GIF, ResearchBib, Index Copernicus, РИНЦ* та ін.)
5. N. D. Pankratova, and **N. G. Zrazhevskaja**, “Method of dynamic VaR and CVaR risk measures forecasting for long range dependent time series on the base of the heteroscedastic model”, *Intelligent Control and Automation Journal*, vol. 8,

no.2, pp. 126-138, 2017, doi: [10.4236/ica.2017.82010](https://doi.org/10.4236/ica.2017.82010). (Входить до наукометричних баз Academic Journals Database, CrossRef, i-Solar, NSTL, Yale University Library, Worldcat та ін.). Дисертантом запропоновано формалізацію, математичне обґрунтування і чисельну апробацію методу моделювання і прогнозування мір динамічних ризиків МЗАКФ.

6. **N. Zrazhevskya**, and A. Zrazhevsky, “Construction of prediction of dynamic risk measures var and cvar for financial time series with different volatility”. *European Journal of Basic and Applied Sciences*, vol. 4, no. 1, pp. 13-22, 2017. (Входить до наукометричних баз Google Scholar, ROAD Directory of Open Access Scholarly Resources, UK, Cabells Directories та ін.). Дисертантом виконано чисельну реалізацію МЗАКФ та аналіз результатів прогнозування для рядів різної волатильності.

7. **Н.Г. Зражевська**, ”Використання VAR та CVAR при моделюванні ризику в часових рядах”, на 16-ій Міжнарод. конф. SAIT, Київ, 2014, с. 92.

8. **Н.Г. Зражевська**, ”Дослідження на сильну залежність фінансових рядів, що описують індекси фондових ринків”, на XVI Міжнарод. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука, Київ, 2015, с. 30.

9. **Н.Г. Зражевська**, “Оптимізаційна модель для оцінювання параметрів Херста”, на 17-ій Міжнарод. конф. SAIT, Київ, 2015, с. 71.

10. **Н.Г. Зражевська**, “Прогнозування фінансових часових рядів на основі моделі FIGARCH”, на Міжнарод. наук.-практ. конф. «Інформаційні технології, економіка та право: стан та перспективи розвитку» (ІТЕП-2015), Чернівці, 2015.

11. **Nataly Zrazhevskya**, “Application of VaR and CVaR risk measures in the Financial Time Series Analysis,” *Workshop: Risk Management Approaches in Engineering Applications*, 2015. [Online] Available:

http://www.ise.ufl.edu/uryasev/conferences_seminars/workshop-the-fundamental-quadrangle-of-risk-in-optimization-and-estimation/.

12. **Н.Г.Зражевська**, "Моделювання динамічних мір ризику VaR і CVaR для часового ряду фондового індексу Nikkei 225", на *XVII Міжнарод. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука*, Київ, 2016, с. 76-78.

13. **Н.Г.Зражевська**, "Оцінювання динамічних мір ризику VaR і CVaR для фондових індексів на основі гетероскедастичної моделі часового ряду", на *18-й Міжнарод.конф. SAIT*, Київ, 2016, с. 86.

14. **Н.Г.Зражевська**, "Структурна схема вибору методів оцінювання динамічних мір ризику VAR і CVAR", на *VII Всеукр. наук.-практ. конф. за міжнародною участю «Інформатика та системні науки»*, Полтава, 2016, с. 128.

15. **Н.Г.Зражевська**, "Моделювання і прогнозування мір ризику VaR і CVaR для часового ряду фондових індексів", на *19-й Міжнарод.конф. SAIT*, Київ, 2017, с. 163.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ	17
ВСТУП	18
РОЗДІЛ 1. Огляд сучасного стану проблеми	25
РОЗДІЛ 2. Моделювання та прогнозування часових рядів. Класичні методи оцінювання мір статичних і динамічних ризиків VaR і CVaR	43
2.1. Систематизація моделей, що описують часові ряди	43
2.1.1. Основні означення та моделі часових рядів	43
2.1.2. Авторегресійні моделі часових рядів	46
2.1.3. Моделі умовної гетероскедастичності	48
2.1.4. Прогнозування часових рядів	50
2.1.5. Статистичні тести, що використовуються при аналізі часових рядів	51
2.2. Основні статистичні методи визначення сильної залежності	55
2.2.1. Основні означення та підходи до встановлення сильної залежності в часових рядах	55
2.2.2. Методи оцінювання параметра Херста як міри сильної залежності	56
2.3. Міри ризику VaR та CVaR: означення, властивості, основні методи оцінювання	60
2.3.1. Математичне та економетричне означення мір статичних і динамічних ризиків VaR та CVaR	60
2.3.2. Основні властивості VaR та CVaR	63

2.3.3. Методи оцінювання VaR та CVaR для статичних ризиків	64
2.3.3.1. Методи, що використовують повну функцію розподілу	64
2.3.3.2. Застосування теорії екстремальних значень для оцінювання мір VaR і CVaR для статичних ризиків	69
2.3.3.3. Квантильне оцінювання	73
2.3.3.4. Оптимізаційний метод Рокфеллера- Урясьєва	74
2.3.4. Методи оцінювання мір ризику VaR та CVaR для часового ряду	75
2.3.4.1. Оцінювання VaR та CVaR на основі стохастичної моделі часового ряду	75
2.3.4.2. Регресійні методи оцінювання VaR та CVaR	79
2.3.5. Методи визначення якості оцінок мір ризику VaR та CVaR	80
2.3.5.1. Тести для визначення якості оцінок мір ризику VaR	80
2.3.5.2. Тести для визначення якості оцінок мір ризику CVaR	82
2.3.5.3 Статистики PoE і bPoE	83
Висновки до розділу 2	84
РОЗДІЛ 3. Системний підхід до побудови прогнозних оцінок мір динамічних ризиків VaR і CVaR із застосуванням методу згладжування автокореляційної функції	86
3.1. Вибір методу прогнозування мір динамічних ризиків VaR та CVaR (І етап)	86

3.2. Побудова моделі прогнозування мір динамічних ризиків VaR і CVaR за МЗАКФ (II етап)	89
3.2.1. Теретична основа МЗАКФ	90
3.2.2. Побудова моделі прогнозування дисперсії	91
3.2.2.1. Оптимізаційний метод згладжування автокореляційної функції	91
3.2.2.2. Прогнозування дисперсії часових рядів з використанням оптимізаційного методу згладжування АКФ	93
3.2.3. Оцінка мір статичних ризиків для залишків моделі	96
3.2.3.1. Класифікація та систематизація методів знаходження VaR та CVaR для випадкової величини	96
3.2.4. Алгоритм МЗАКФ побудови прогнозу мір динамічних ризиків VaR і CVaR	100
Висновки до розділу 3	103
РОЗДІЛ 4. Чисельна апробація системного підходу до побудови прогнозних оцінок мір динамічних ризиків VaR і CVaR	105
4.1. Демонстрація застосування структурно-ієрархічної схеми вибору метода оцінювання мір динамічних ризиків VaR і CVaR	105
4.2. Демонстрація застосування структурно-ієрархічної схеми вибору метода оцінювання мір статичних ризиків VaR і CVaR	118
4.3. Практичний приклад моделювання автокореляційної функції за оптимізаційним методом згладжування АКФ	121

4.4. Приклад побудови прогнозу дисперсії часового ряду на основі моделі FIGARCH з використанням оптимізаційної процедури	127
4.5. Чисельна апробація МЗАКФ	132
4.6. Апробація системного підходу на часових рядах різної волатильності	143
Висновки до розділу 4	152
ВИСНОВКИ	155
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	157
ДОДАТОК А.	171
ДОДАТОК Б.	173
ДОДАТОК В.	174
ДОДАТОК Г.	177

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

АКФ - автокореляційна функція,

ММП - метод максимальної правдоподібності,

МНК - метод найменших квадратів,

iid - незалежні однаково розподілені випадкові величини,

МЗАКФ - метод згладжування автокореляційної функції,

ME - середня похибка,

MAE - середня абсолютна похибка,

MSE - середньоквадратична похибка,

MAPE - середня абсолютна процентна похибка,

VaR - міра ризику Value at Risk,

CVaR - міра ризику Conditionl Value at Risk,

AR model - модель авторегресії,

GARCH - generalized autoregressive conditional heteroscedastic model - узагальнена авторегресійна модель умовної гетероскедастичності,

FIGARCH - fractionally integrated GARCH - дробово-інтегрована модель умовної гетероскедастичності,

EVT - extreme value theory - теорія екстремальних значень,

GEV - gereralized extreme value distribution - узагальнений розподіл екстремальних значень,

GPD - generalized Pareto distribution - узагальнений розподіл Парето,

POT - peaks over tresholds - піки, що перевищують порогове значення,

PoE - probability of exceedance - ймовірність перевищення,

AIC - інформаційний критерій Акаїке,

HQC - інформаційний критерій Хеннена - Куїна.

ВСТУП

Актуальність теми. В останні роки у зв'язку зі стрімким розвитком обчислювальної техніки та інформаційних технологій все більшої популярності набуває застосування методів моделювання і прогнозування часових рядів в різних галузях практичної діяльності та теоретичних дослідженнях, зокрема у фінансовій діяльності людини. Важливим застосуванням для теорії фінансових часових рядів є теорія ризиків.

Проблема вимірювання ризику - одна з найважливіших та найскладніших проблем, з якою стикаються статистики, економісти, фінансисти. Необхідність оцінити можливі збитки і спрогнозувати розмір резервного капіталу, необхідний для стабільного функціонування фінансового інституту, привели до появи поняття міри ризику. З 90-х років XX століття VaR (Value at Risk) і CVaR (Conditional Value at Risk) є найбільш популярними мірами, що використовуються фахівцями для оцінювання, перш за все, ризиків можливих втрат на ринку цінних паперів. Існує досить великий обсяг робіт, присвячених методам оцінювання і прогнозування цих мір ризиків. Так проблеми моделювання і прогнозування VaR розглянуто в роботах П. Джоріона, К. Дауда, А. Дж. Мак-Ніла, Р. Фрейя, П. Ембрехца, Р. Кауфманна та ін. Серед авторів робіт, присвячених CVaR, слід відзначити роботи П. Артцнера, Ф. Дельбаена, Д. Хіта, Р. Т. Рокфеллера, С. П. Урясьєва, С. Ацербі; Д. Таше, С. Надараджа, Бо Чжана. Активний розвиток методів оцінювання мір ризику привели до необхідності їхньої класифікації та систематизації методами системного аналізу. Водночас на сьогодні існує проблема недостатньо розробленого математичного апарату для розв'язання задач, що пов'язані з оцінюванням мір ризику VaR і CVaR. Зокрема, це стосується проблеми оцінювання мір ризиків для волатильних фінансових рядів із властивістю сильної залежності, що ускладнює застосування класичних методів. При побудові моделі прогнозування важливо в теоретичному та практичному плані найбільш повно враховувати

особливості походження вхідних даних та кінцеву мету з точки зору як якісного, так і кількісного аналізу результатів. Зокрема, процес вибору моделі має максимально повно враховувати всю апіорну інформацію, яка надходить із різних джерел, таких як статистичний аналіз даних, економічні та економетричні закони, досвід фахівців в різних галузях суміжних задач. Велике різноманіття сучасних моделей, що описують волатильні часові ряди та їх похідні (зокрема, динамічні міри ризику), зазвичай використовують лише частину наявної апіорної інформації. Це приводить до необхідності систематизації моделей по можливостям їх застосування до різних задач. Крім цього, актуальним є адаптація старих моделей та створення нових для максимально повного врахування апіорної інформації.

Таким чином, незважаючи на значний обсяг робіт, присвячених мірам ризику VaR і CVaR, та значні досягнення у розвитку як теоретичних, так і практичних її аспектів, існує ряд проблем, що потребують вирішення. Ці проблеми пов'язані із необхідністю систематизації та класифікації вже наявних та побудови нових методів оцінювання та прогнозування мір ризику, які здатні більш досконало враховувати особливості вхідних даних, а, отже, отримувати більш якісні прогнозні значення. Це аргументує актуальність досліджень, проведених у роботі.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційна робота виконана в Інституті прикладного системного аналізу Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» (ІПСА) відповідно до планів наступних науково-дослідних тем:

- «Розробка комплексної системи забезпечення безпеки та живучості функціонування складних технічних систем в реальному режимі часу», № держреєстрації 0115U000357;
- «Розробка інструментарію діагностування гарантованого функціонування складних технічних систем в умовах невизначеностей

та дестабілізуючих факторів ризику», номер державної реєстрації 0117U004281.

Метою дослідження є розробка моделей, методів оцінювання та прогнозування мір динамічних ризиків VaR та CVaR з метою підвищення якості прогнозування ризиків втрат на фондових ринках, що описуються волатильними часовими рядами із сильною залежністю.

Для досягнення мети дослідження поставлені й розв’язані такі **задачі**:

- розроблено новий метод визначення параметру Херста на основі оптимізаційної процедури;
- запропоновано модель оптимізаційного згладжування автокореляційної функції (АКФ) часових рядів, яка найкращим чином відображає поведінку функції для великих значень аргументу і дозволяє отримати якісний прогноз автокореляції;
- розроблено новий метод моделювання і прогнозування дисперсії часових рядів із врахуванням сильної залежності на основі моделі FIGARCH;
- запропоновано класифікаційні та структурно-ієрархічні схеми вибору методу оцінювання мір статичних і динамічних ризиків VaR і CVaR;
- розроблено новий метод моделювання і прогнозування мір динамічних ризиків VaR і CVaR на основі моделі FIGARCH – метод згладжування автокореляційної функції (МЗАКФ);

на основі запропонованого системного підходу розв’язано низку прикладних задач моделювання та прогнозування мір ризику для волатильних часових рядів логарифмічної дохідності індексів різних фондових бірж.

Об’єктом дослідження є процеси аналізу та оцінювання фондового ринку.

Предмет дослідження – статистичні методи та моделі для аналізу часових рядів із сильною залежністю, методи оцінювання мір статичних ризиків VaR та CVaR, методи оцінювання та прогнозування мір динамічних ризиків VaR та CVaR, методи оптимізації.

Методи дослідження – методи системного аналізу, статистичні методи аналізу часових рядів, теорія ризиків, теорія прийняття рішень, теорія лінійного і нелінійного оцінювання.

Наукова новизна отриманих результатів. На основі проведених у дисертаційній роботі досліджень запропоновано системний підхід до моделювання й прогнозування мір динамічних ризиків VaR і CVaR. Наукова новизна роботи визначається наступними теоретичними і практичними результатами, отриманими автором:

Вперше:

- запропоновано метод моделювання АКФ часового ряду на основі оптимізаційної процедури, що на відміну від наявних дозволяє більш точно змодельовати поведінку АКФ для великих значень аргументу - оптимізаційний метод згладжування АКФ;
- розроблено метод моделювання і прогнозування дисперсії часового ряду на основі моделі FIGARCH, який більш якісно і з меншим запізненням, в порівнянні з іншими методами, визначає екстремальні значення ряду. Метод включає зведення моделі FIGARCH до авторегресійної моделі нескінченного порядку для квадратів процесу з наступним редукуванням. Коефіцієнти авторегресії знаходяться з використанням запропонованої моделі АКФ;
- розроблено метод моделювання і прогнозування мір динамічних ризиків VaR і CVaR на основі моделі FIGARCH з використанням оптимізаційної процедури – метод згладжування автокореляційної функції (МЗАКФ), який, на відміну від наявних, дозволяє отримати більш точний прогноз для широкого кола фінансових рядів, що мають

різну волатильність. Точність прогнозу підтверджено порівняльним аналізом прогнозних оцінок з реальними даними. Для зручності користування метод сформульовано у вигляді покрокового алгоритму.

Набуло подальшого розвитку:

- методи оцінювання параметра сильної залежності параметра Херста.

Удосконалено:

- класифікацію методів оцінювання мір статичних і динамічних ризиків VaR і CVaR, що найбільш повно охоплює існуючі сучасні методи;
- формалізацію процесу вибору методу оцінювання мір статичних і динамічних ризиків VaR і CVaR.

Практичне значення одержаних результатів полягає у створенні формалізованої, теоретично обґрунтованої методики та комплексу програмних модулів, що реалізують запропонований системний підхід до розв'язання задачі моделювання і прогнозування мір динамічних ризиків VaR і CVaR, які є одними з найбільш популярних мір для вимірювання ризиків фінансових інструментів. Запропоновані в рамках підходу класифікаційні схеми оцінювання та системи прийняття рішення щодо вибору методу оцінювання VaR та CVaR статичних і динамічних ризиків є корисними для фінансових аналітиків при виборі методу оцінювання різних ризиків по значеннях часових рядів з характеристиками в широкому діапазоні значень. Сформульований у вигляді алгоритму новий метод прогнозування мір динамічних ризиків VaR та CVaR МЗАКФ дає можливість отримати якісні прогнозні значення для різних ринкових ризиків. Тестування та демонстрацію використання системного підходу в роботі проведено на значеннях індексів фондових бірж, але з такою ж ефективністю він може бути застосований в задачах оцінювання процентних, валютних та товарних ризиків. Запропонований у роботі метод прогнозування дисперсії часових рядів суттєво спрощує побудову моделей гетероскедастичних процесів в усіх областях, де використовується теорія часових рядів. Зібрані та проаналізовані

в роботі сучасні методи оцінювання мір ризиків VaR та CVaR, якісні та кількісні тести, моделі гетероскедастичних процесів та методи їх побудови в поєднанні з класифікаційними схемами, огляд літературних джерел є корисними як методичний матеріал при написанні курсових та дипломних робіт, а також при складанні лекційних курсів з теорії ризиків.

Результати дисертаційної роботи впроваджені в учбовий процес кафедри "Математичні методи системного аналізу" Інституту прикладного системного аналізу КПІ ім. Ігоря Сікорського та при виконанні сумісних проектів NewGround LLC Ukraine з American Optimal Decisions, Inc., пов'язаних з оптимізацією діяльності фондових ринків, що підтверджено актами впровадження.

Особистий внесок здобувача. Всі наукові результати, що складають основний зміст роботи та становлять наукову новизну, отримані автором особисто. Зокрема, розроблено, теоретично обґрунтовано та чисельно апробовано метод моделювання і прогнозування дисперсії волатильних часових рядів з врахуванням сильної залежності. З використанням методології системного аналізу проведені класифікації сучасних методів обчислення і прогнозування мір динамічних ризиків VaR і CVaR, сформульовані структурно-ієрархічні схеми вибору методу їх оцінювання. У працях, написаних у співавторстві, здобувачеві належать: у праці [1] математичне обґрунтування і чисельна апробація методу для моделювання АКФ на основі оптимізаційної процедури, у праці [3] здобувачем виконана побудова процедури прийняття рішення щодо вибору методу оцінювання статичних мір ризику, формалізація і чисельна апробація класифікаційної схеми оцінювання VaR та CVaR, у праці [5] запропоновано формалізацію, математичне обґрунтування і чисельну апробацію методу моделювання і прогнозування мір динамічних ризиків МЗАКФ, у праці [6] здійснено чисельну реалізацію МЗАКФ та аналіз результатів прогнозування для рядів різної волатильності.

Апробація результатів дисертації. Наукові та практичні результати доповідались на семінарах та наукових конференціях:

- міжнародних наукових конференціях «Системний аналіз та інформаційні технології» SAIT (м. Київ, 2014 – 2017 pp);
- міжнародних наукових конференціях ім. академіка М. Кравчука (м. Київ, 2015, 2016);
- міжнародній науково-практичній конференції «Інформаційні технології, економіка та право: стан та перспективи розвитку» ІТЕП-2015 (м. Чернівці, 2015);
- міжнародній науковій конференції “Risk Management Approaches in Engineering Applications”, (Department of Industrial and Systems Engineering, University of Florida, USA, 2015);
- всеукраїнській науково-практичній конференції за міжнародною участю «Інформатика та системні науки» (м. Полтава, 2016);
- науковому семінарі при Навчально-науковому комплексі “Інститут прикладного системного аналізу” КПІ ім. Ігоря Сікорського (Київ, 2017).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в 15 наукових працях, серед них 6 статей у наукових фахових виданнях (4 статті у виданнях іноземних держав, 2 статті у виданнях України, що включено до міжнародних наукометричних баз даних), 9 тез у матеріалах доповідей міжнародних і всеукраїнських конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, переліку умовних позначень, чотирьох основних розділів, висновків, списку використаних джерел і чотирьох додатків. Робота викладена на 179 сторінках і містить 139 сторінок основної частини, 20 рисунків, 30 таблиць і список використаних джерел із 148 найменувань.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД СУЧАСНОГО СТАНУ ПРОБЛЕМИ

Формалізація даних у вигляді часових рядів використовується у багатьох сферах людської діяльності. Практично всі природничі та гуманітарні науки в тому чи іншому вигляді потребують методів для аналізу та класифікації часових послідовностей. Часові ряди виникають при вимірюванні показників (характеристик) як технічних, так і природних, соціальних, економічних та інших систем. Прикладом часових рядів є екологічні дані, які грають важливу роль у сфері охорони здоров'я та досліджувалися у багатьох роботах, наприклад, у роботі Дж. Фаня, і К. Яо [1]. Іншим прикладом часових рядів є щомісячні значення індексу споживчих цін, щоквартальні величини валового внутрішнього продукту, щорічні доходи від продажів якої-небудь компанії [2].

Особливо важливу роль часові ряди грають у фінансовій діяльності людини. Аналізу фінансових часових рядів присвячена така фундаментальна робота, як монографія Р. Тсая [2]. Аналіз фінансових часових рядів пов'язаний з теорією і практикою вивчення змін цін фінансових інструментів в часі. При отриманні часового ряду, як реалізації стохастичного процесу, ризик-менеджери найчастіше використовують стандартний показник - дохідність активів, відносний дохід ("return"), прологарифмовану дохідність ("logreturn") або негативну дохідність - втрати («losses») [2], [3]. В якості фінансового інструменту часто розглядаються фондові індекси - складові показники зміни цін певної групи цінних паперів (так званого "індексного кошика"). Зміни індексу з плином часу дозволяють судити про загальний напрямок руху ринку. Залежно від вибірки показників, фондовий індекс може відображати поведінку якоїсь групи цінних паперів чи інших активів, або ринку (сегмента ринку) в цілому. Аналізу часових рядів, що зображають фондові індекси, присвячено багато робіт, наприклад, робота Дж. Халла [4].

Аналіз часових рядів, як наука, є сукупність математико-статистичних методів аналізу, які призначені для впорядкування та класифікації даних, виявлення структури даних, розробки стратегій поведінки складних систем, моделювання та прогнозування явищ, які змінюються із часом, розробки методів прийняття рішень тощо. Широке розповсюдження часових рядів та потреба у вирішенні пов'язаних із їх аналізом задач, призводять до необхідності систематизації стандартних підходів, їх вдосконалення та розробці нових підходів до аналізу часових рядів.

Існують різні підходи до аналізу часових рядів. Це пов'язано, перш за все, із різноманітністю походження часових рядів. Так, часові ряди поділяються в залежності від форми представлення на ряди, що описують абсолютні показники і відносні. За кількістю показників в кожен момент часу часові ряди поділяються на одновимірні та багатовимірні. В залежності від часового параметра – на моментні та інтервальні, з однаковими проміжками часу та з різними, з випадковою часовою складовою та детермінованою. В залежності від наявності пропущених даних у вибірці розглядають повні та неповні ряди. Найчастіше за природою походження досліджувані часові ряди є результатом спостереження поведінки складних систем, детермінований опис яких є неможливий. Це призводить до необхідності описувати часові ряди за допомогою стохастичних моделей. У такому випадку зазвичай часовий ряд розглядається як реалізація деякого випадкового процесу (наприклад, [5]). На основі вибраної ймовірнісної інтерпретації запропоновані різні види класифікації часових рядів. Розглядають стаціонарні та нестаціонарні, одновимірні та багатовимірні, параметричні та непараметричні, сильно та слабо залежні, періодичні часові ряди. Детальна класифікація часових рядів наведена, наприклад, у роботах Г. Кірчгоснера та Дж. Вольтера [5], А. Пеліта та Д. Поповіца [6], Е. Зивота та Дж. Ванга [7] та у багатьох інших монографіях, присвячених аналізу часових рядів.

Важливу роль в аналізі часових рядів грає поняття сильної залежності. Вперше на важливість цього поняття для дослідження економічних даних

було вказано у роботі С.В. Грангера [8]. Автор показав, що для багатьох економічних часових рядів характерний спільний вигляд їхньої спектральної щільності. У літературі наведено декілька альтернативних означень сильної залежності. Найбільш відоме з них, наведене, наприклад, у роботах Дж. Берана [9] і В. Палма [10], визначає сильну залежність для стаціонарного процесу через асимптотичну поведінку автокореляційної функції. У роботі Дж. Берана [9], дається альтернативне означення сильної залежності через асимптотичну поведінку вибіркової дисперсії агрегованого часового ряду. Використовуючи перетворення Фур'є, від автокореляційної функції можна перейти до спектральної щільності. При цьому за теорією перетворення Фур'є [11], між асимптотичними поведінками автокореляційної функції та спектральної щільності є прямий зв'язок. Про це більш детально викладено у роботі С.Л. Марпла [12]. Описані означення сильної залежності є еквівалентними та пов'язані між собою параметром, який історично називають параметром Херста або параметром сильної залежності. Висновок про наявність у часового ряду властивості сильної залежності зазвичай робиться на підставі величини параметра Херста.

У сучасній літературі представлено багато наукових робіт, присвячених аналізу часових рядів із сильною залежністю. Основні задачі, які досліджуються вченими, це встановлення сильної залежності та самоподібності, побудова методів для дослідження даних, розробка ймовірнісних моделей, що можуть бути використані для моделювання та прогнозування. Перша задача, яку можна віднести до задачі перевірки на самоподібність, була поставлена Херстом при дослідженні накопичення водних ресурсів [13]. Результатом цієї роботи став сформульований емпіричний закон Херста.

Для оцінювання параметра Херста сучасна література пропонує достатньо багато методів. Більшість з них базується на оцінюванні автокореляційної функції, або спектральної щільності, чи вибіркової дисперсії методами математичної статистики та застосуванням до них

апарату регресійного аналізу. Класичні методи оцінювання параметра Херста описані, наприклад, у роботах, Е. Зівота [7], В. Палма [10], Дж. Берана [9], М.С. Так'ю, В. Теверовського, В. Вілнджера [14].

У роботі П.М.Робінсона [15] оцінка для параметра Херста побудована на основі Гаусівського семіпараметричного методу оцінювання спектральної щільності процесу. Цей підхід був узагальнений у роботі Дж. Гао [16]. У роботі В. Теверовського і М.С. Так'ю [17] приведені оцінки параметра Херста, побудовані на основі періодограмних оцінок для спектральної щільності, проведений їх аналіз на робастність та результати застосовані як до штучно змодельованих часових рядів, так і до даних по трафіку через мережу інтернет. Аналогічні оцінки були розглянуті у роботі П.М. Робінсона [18]. У статті Г. Чена и Д.С. Поскита [19] досліджуються теоретичні моменти та асимптотичний розподіл періодограмних оцінок параметра Херста у випадку гаусівських процесів.

В роботі В. Теверовського і М.С. Так'ю [20], використовуючи оцінку параметра Херста на основі дисперсії сильно залежного процесу, проводяться дослідження по визначенню сильної залежності для різних випадків нестационарних процесів. Зокрема, у випадках, коли процес містить повільний тренд або стрибки математичного сподівання.

Один із класичних підходів для оцінювання параметра Херста базується на емпіричному законі Херста. Відповідний напрямок в аналізі сильно залежних часових рядів має назву R/S аналіз, загальні положення якого описані, наприклад, у роботах [9], [10], [7]. У статті Д. Коніфе і Дж. Спенсера [21] наведені результати щодо дослідження стохастичних властивостей R/S статистики і можливості її застосування до аналізу сильно залежних часових рядів.

Наявність великої кількості методів оцінювання параметра Херста призводить до необхідності їх систематизації, визначення меж їх застосування, порівняння їх спроможності давати вірогідні результати при аналізі часових рядів різної природи. Так, однією із проблем, описаною у

роботі І.Г. Журбенко та І.А. Кожевнікова [22], є оцінювання спектральної щільності у випадку, коли процес за властивостями автокореляційної функції близький до білого шуму. Ця проблема призводить до необхідності розробляти нові методи оцінювання параметра Херста на основі періодограм у випадку, коли він близький до 0,5. У роботах О.Г. Зражевського [23], [24] було запропоновано у зазначеному випадку використовувати періодограмні оцінки із кореляційними вікнами, що дозволило отримати достовірні оцінки параметра Херста.

Приклади застосування методів оцінювання параметра Херста для дослідження часових рядів різної природи та структури на наявність сильної залежності та самоподібності наведені у численних роботах вітчизняних та закордонних вчених. Задача перевірки часового ряду телетрафіку на самоподібність досліджена в роботі Б.С. Цибакова [25]. Задача встановлення сильної залежності та перевірки на самоподібність трафіку через мережу Інтернет розглядалася в роботах [26] – [29]. Задача встановлення сильної залежності та самоподібності для фінансових часових рядів, що зображають ціни біржових фінансових інструментів, розглянута у роботах О.Г. Зражевського та М.П. Моклячука [30]–[32].

У роботі Н.Д. Панкратової і Н.Г. Зражевської [33] запропоновано новий метод оцінювання параметра Херста з використанням оптимізаційної процедури. Метод дозволяє не тільки покращити оцінку параметра, а і зробити її більш адекватною для прогнозування реального часового ряду, оскільки оцінка найкращим чином описує сильну залежність в асимптотичному сенсі. У роботі продемонстровано застосування запропонованого методу для часового ряду фондового індексу РТС (“Российская Торговая Система”).

Для характеристики мінливості часового ряду використовується поняття волатильності. Для розрахунку волатильності застосовується статистичний показник вибіркового стандартного відхилення. Особливості волатильності для фінансових часових рядів досить детально описані в таких

монографіях, як [2], [7]. Так, зокрема, у роботі Р. Цая [2] вказуються наступні властивості волатильності фінансових рядів. Для волатильності характерна кластерність - в якісь періоди часу волатильність вища, в якісь - нижча. Волатильність змінюється навколо деякого фіксованого рівня - тобто можна говорити про стаціонарність волатильності. Для волатильності є характерним "ефект важеля" ("leverage effect") – "погані" новини (негативні шоки) зазвичай мають більший вплив на волатильність, ніж "хороші" новини (позитивні шоки), тобто волатильність на ринку, що падає, вища, ніж на ринку, що зростає. Крім того, часовий ряд волатильності часто має властивість сильної залежності. Зазначені особливості істотно визначають методи моделювання та прогнозування волатильності фінансових інструментів [2].

Для моделювання волатильності найбільшу популярність набули моделі ARCH - класу. Перша модель волатильних рядів - ARCH model (Autoregressive Conditional Heteroscedastic model) – Авторегресійна модель умовної гетероскедастичності. Модель була запропонована Р.Ф. Енглем в 1982 у роботі [34]. З того часу розроблені численні узагальнення і модифікації цієї моделі. Зупинимось на деяких з них, які набули найширшого застосування. Так у 1986 році Т. Боллерслемом була запропонована узагальнена модель GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic model) [35]. Якщо ARCH модель передбачає залежність умовної дисперсії тільки від квадратів минулих значень часового ряду, то в моделі Боллерслева умовна дисперсія залежить також від минулих значень самої умовної дисперсії. Асиметричні моделі GARCH були введені з метою врахувати "ефект важеля": До таких моделей відноситься модель EGARCH (Exponential Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic), запропонована Д. Б. Нельсоном в 1991 році [36]. У даній моделі крім врахування асиметрії також вирішується проблема позитивної визначеності моделі, оскільки замість умовних дисперсій в моделі беруть участь їх логарифми. Популярними є також асиметрична модель GJR-GARCH, запропонована у роботі [37], та модель APARCH [38].

В 1996 году Р.Т. Бейли запропонував дробово - інтегровану модель GARCH - FIGARCH (Fractionally Integrated GARCH) [39], [40], яка враховувала ефект наявності у часовому ряді дисперсії властивості сильної залежності. У роботі модель була застосована для моделювання варіації часового ряду курсу валют. У цьому ж році у роботі [41] Т. Боллерслев і Х. О. Миккельсен запропонували модель FIEGARCH, яка враховувала і ефект сильної залежності, і ефект важеля. Подальшим розвитком моделі FIGARCH є адаптивна модель FIGARCH (A-FIGARCH) Р. Т. Бейлі і С. Морана [42] і модель FIEGARCH в середньому (FIEGARCH-M), запропонована у роботі Б. Кристенсена [43].

Детальний опис наявних модифікацій моделей ARCH-класу, їх властивості, переваги, недоліки і приклади застосування до моделювання та прогнозування фінансових часових рядів можна знайти, наприклад, у роботах [44], [45], [2], [7].

Однією з причин активного розвитку і застосування GARCH моделей є простота в оцінюванні параметрів моделі в порівнянні з іншими моделями волатильності. Для оцінювання параметрів зазвичай застосовується метод максимальної правдоподібності (ММП) або квазі-максимальної правдоподібності [46], [2], [7]. Залежно від типу функції розподілу випадкової величини використовуються різні функції максимальної правдоподібності. Вид функції правдоподібності для нормального розподілу та t-розподілу Стюдента можна знайти, наприклад, в роботах [2], [7]. Оскільки GARCH модель може розглядатися як модель ARMA для квадратів залишків моделі, для оцінювання порядку моделі можуть бути використані інформаційні критерії, розроблені Акаїке [47], метод Шварца – Баєса [7], критерій на основі спектральної відстані моделей, запропонований у роботі [48].

Зупинимось детальніше на моделі FIGARCH. Детальний опис моделі і її властивостей можна знайти, наприклад, в роботах [49], [50]. У роботі А. Ілмаза і Г. Унала [51] досліджується існування властивості хаотичності в

моделі FIGARCH, яке може бути використаним для визначення горизонту прогнозу і покращення якості прогнозних оцінок, отриманих за допомогою цієї моделі. Оцінювання порядку дробового інтегрування зазвичай зводиться до оцінювання параметра Херста H та залежать від припущень щодо розподілу похибок. Наприклад, якщо похибки мають нормальний розподіл, то $d = H - 1/2$, що зазначено у роботі С. Дж. Десса і Д. Г. Вакде [52]. Якщо похибки є симетрично стійкими із параметром стійкості α , то, як зазначено в роботі С. Стоєва [53], $d = H - 1/\alpha$. Оцінювання параметра можна також проводити з використанням методу Віттла [10] або рекурсивного методу оцінювання, розглянутого в [54].

Широко представлено в літературі і практичне застосування моделей класу FIGARCH для моделювання фінансових часових рядів. Так в роботі А. Лахіані і О. Йоусфі [55] модель використовується для моделювання часових рядів дохідностей Туніської фондової біржі, аналізуються переваги моделі в порівнянні з іншими моделями GARCH - класу. У роботі А. Банера і С. Саркара [56] моделюється волатильність дохідності національної фондової біржі Індії (NSE). Економетричні і статистичні особливості моделі стосовно рядів, що описують динаміку зміни цін на нафту марок Бренд і ВТІ, розглянуті в роботі Н. Селмі і Н. Начича [57]. У роботі Р.Т. Бейлі, Ю.В. Хана, і Р. Дж. Майерса [58] описується застосування моделі до часових рядів, що описують зміни цін на сировинних ринках (розглядаються індекси цін на зерно, соєві боби, яловичину, свинину, бензин і золото). Результати досліджень підтверджують високу ефективність моделі FIGARCH в моделюванні рядів, що мають кластерну волатильність і розподіл з товстими хвостами.

Перейдемо до задачі прогнозування часових рядів на основі моделей із класу GARCH, яка широко висвітлюється в літературі. Загальні підходи до проблеми прогнозування на основі розглянутого класу моделей можна знайти, наприклад, в роботах [59], [2], [7]. Наведемо приклади практичної побудови прогнозів з використанням GARCH моделей. Так в роботі Ф.

Магнуса і Е. Фосу [60] індекси фондової біржі Гани (GSE) за 10-річний період моделюються і прогнозуються з використанням моделей випадкового блукання (Random Walk model), GARCH (1,1), EGARCH (1,1), and TGARCH (1,1). Проводиться порівняльний аналіз результатів, отриманих з використанням різних моделей.

У статті С. Браунліса, Р. Енгла і Б. Келлі [61] будується прогноз з використанням моделей EGARCH, нелінійної NGARCH і асиметричної ARCH - APARCH для часового ряду значень фондового індексу S&P 500, що представляє 500 акціонерних компаній США, які мають найбільшу капіталізацію. Проводиться аналіз, наскільки розглянуті моделі точно відображають період високої волатильності, пов'язаний зі світовою кризою 2008 року.

У роботі [62] прогнозування ряду індексів трьох азіатських фондових бірж – тайландської (SET), Малайзійської (KLCT) і Сінгапурської (STI) - здійснюється з використанням моделі GARCH. Розглядається 6 типів розподілу залишків моделі - нормальне, нормальне асиметричне, t - розподіл, асиметричний t - розподіл, узагальнений розподіл і асиметричний узагальнений розподіл. У роботі проводиться аналіз, наскільки налагодженість моделі впливає на якість прогнозу.

Моделюванню та прогнозуванню цін на продукцію сільського господарства (цибуля і картопля) на внутрішньому ринку Індії присвячено статтю П. Хонрао [63]. Порівняння результатів, отриманих з використанням моделей GARCH(1,1) і ARCH(12) показало, що GARCH - модель є кращою моделлю, яка описує волатильність поведінки цін і дозволяє отримати якісний прогноз.

Як було показано, зокрема у роботі Е. Зівота [7], GARCH процес еквівалентний процесу авторегресії нескінченного порядку. Використовуючи метод редукції від авторегресійної моделі нескінченного порядку переходять до авторегресії скінченного, достатньо великого порядку. Таким чином, прогнозування за FIGARCH моделлю можна звести до прогнозування за

авторегресійною моделлю скінченного порядку. Недоліком цього підходу є те, що при цьому не враховується інформація щодо сильної залежності, що може призвести до збільшення похибки прогнозних значень.

Використання всієї доступної інформації про часовий ряд є важливим для отримання якісного прогнозу. Отже, при виборі методу прогнозування не слід нехтувати інформацією щодо сильної залежності. У роботах М.П. Моклячука та О.Г. Зражевського [30], [31] запропоновано метод прогнозування сильно залежних часових рядів на основі авторегресійних моделей нескінченного порядку. При цьому сильна залежність враховується шляхом проведення екстраполяції регресійної моделі для автокореляції. У роботі Н.Г. Зражевської [64] даний підхід застосовано до прогнозування дисперсії на основі моделі FIGARCH. Запропонований у роботі метод прогнозування був проілюстрований на прикладі прогнозування часового ряду індексу основного індикатора фондового ринку Росії - індексу РТС.

Широке застосування моделей GARCH класу для моделювання та прогнозування часових рядів призвело до появи програмних модулів в стандартних програмних пакетах. Так в роботі Р. Тсая [2] для задачі моделювання і прогнозування часових рядів використовується R - пакет, в роботі Е.Зівота [7] - пакет S_PLUS. У роботі Дж. Педерсена [65] розглядається прогнозування на основі моделей ARMA (1,1) і GARCH (1,1) з використанням програмного модуля rugarch 1.2-2.

Слід підкреслити, що крім розглянутих параметричних моделей волатильності в останні роки досить активно розвиваються напівпараметричні і непараметричні моделі. Такі моделі не вимагають апріорної інформації про функціональні закономірності часового ряду і, в той же час, дозволяють отримати якісні оцінки волатильності. Огляд таких підходів до оцінювання волатильності можна знайти, наприклад, в роботі Е. Росси [45].

Важливим застосуванням теорії фінансових часових рядів є теорія ризиків. Проблема вимірювання ризиків - одна з найважливіших та

найскладніших проблем, з якою стикаються статистици, економісти, фінансисти. Несприятливі тенденції на ринку є причиною ринкових ризиків і можуть привести до втрат. Оцінюючи кредитні або операційні ризики, потрібно визначити капітал, що допоможе захистити фінансову установу від збитків, викликаних кредитними зниженнями і дефолтами або непередбаченими операційними проблемами. В сфері страхування важливою є проблема накопичення резервів, що допоможуть захиститися від втрат.

Бажання оцінити можливі збитки і розмір резервного капіталу, необхідний для їх покриття, привели до появи поняття міри ризику. Загальну теорію ризиків, їх класифікацію та підходи до оцінювання можна знайти, наприклад, в [66], [67], [68].

Однією з найбільш розповсюджених мір фінансових ризиків є міра Value-at-Risk (VaR). Вперше термін VaR зустрічається в теорії Гаррі Марковіца. Марковіцем була сформульована методика формування інвестиційного портфеля, спрямована на оптимальний вибір активів, виходячи з необхідного співвідношення дохідність / ризик. У роботі [69] Марковіц вперше запропонував математичну модель формування оптимального портфеля і методи побудови портфелів. Основна заслуга Марковіца полягає в пропозиції ймовірнісної формалізації понять дохідність і ризик, що дозволило перевести задачу вибору оптимального портфеля на формальну математичну мову. Більш детально основні положення теорії були сформульовані в монографії Марковіца [70]. З математичної точки зору задача по формуванню оптимального портфеля являє собою задачу квадратичної оптимізації при лінійних обмеженнях. В теорії Марковіца середній дохід фіксується, і мінімізується дисперсія доходу, як міра ризику отримати дохід, відмінний від середнього. Така постановка задачі має суттєві недоліки: недостатньо враховує суб'єктивні побажання інвестора, у випадку товстих хвостів розподілу постановка може бути позбавлена сенсу. Якщо в якості критерію вибрати максимізацію середнього доходу, виникає ефект, який називається ефектом "біржового парадокса" - дохід особи, яка приймає

рішення, може прямувати до нескінченності, але ймовірність розоритися при цьому прямує до одиниці.

Важливим поштовхом в розвитку концепції VaR стало опублікування у 1994 році компанією J.P. Morgan & Co методології знаходження міри ризику. Саме з цією компанією пов'язана неформальна назва міри ризику «16:15», оскільки саме в цей час значення VaR повинно бути на столі у глави правління банку J.P.Morgan. У цьому банку показник VaR і був вперше введений в обіг з метою підвищення ефективності роботи з ризиками. Компанія також надала безкоштовний доступ до необхідних оцінок базових параметрів [71]. Таким чином, VaR вперше був представлений за рамками порівняно невеликої групи аналітиків. Два роки по тому, методологія була виділена в самостійний некомерційний бізнес і зараз є частиною Risk Metrics Group.

Наступним кроком у становленні VaR був 1997 рік, коли Комісія по цінних паперах та біржам США ухвалила рішення, згідно з яким державні корпорації повинні надавати кількісну інформацію про їх діяльність із дохідними цінними паперами. Найбільші банки і дилери вирішили це питання, додавши показник VaR до фінансової звітності.

Останнім імпульсом до широкого використання VaR стала угода Базель II, що була підписана у 1999 році, - документ Базельського комітету з банківського нагляду «Міжнародна конвергенція вимірювання капіталу і стандартів капіталу: нові підходи», що містить методичні рекомендації в області банківського регулювання [72]. Базельським комітетом було запропоновано використовувати VaR-моделі розрахунку ризику з метою підвищення якості управління ризиками в банківській справі, що повинно зміцнити стабільність фінансової системи в цілому. На даний момент VaR входить в число стандартних показників, якими оперують більшість фінансових інститутів.

Економетричне і статистичне визначення міри ризику VaR приведено у багатьох наукових статтях і монографіях, проаналізовано властивості і

особливості застосування [73], [68], [2], [7], [74]. Також широко висвітлюється в літературі переваги та недоліки цієї міри ризику [75], [76], [77]. VaR є простою для інтуїтивного розуміння мірою ризику: знайшовши VaR, можна оцінити можливі втрати. Порівнюючи VaR для одного і того ж довірчого рівня можна проранжувати два розподіли. Задавши VaR для всіх довірчих рівнів, можна повністю визначити розподіл. Однією з важливих переваг VaR є стабільність оцінювальних процедур. Оскільки VaR ігнорує хвіст розподілу, то на цю міру ризику не впливають великі втрати в хвості розподілу, які часто важко виміряти. До переваг VaR можна віднести і наявність параметричних моделей для її оцінювання. До недоліків VaR відносять, в першу чергу, її некогерентність. Поняття когерентності міри ризику було введено в роботі [75]. Некогерентність VaR означає, що не можна при змішуванні різних процесів оцінити сумарний ризик як суму ризиків окремих процесів. Крім того, VaR - порогова характеристика, яка вказує значення, яке є ризик втратити, але не визначає, наскільки більше цього значення можуть бути втрати. Якщо відома функція розподілу втрат, то значення цих втрат можна визначити. Але оскільки функції розподілу втрат, як правило, емпіричні і нестационарні, то в більшості випадків VaR є тільки порогова характеристика. VaR не розрізняє ситуації, коли втрати викликані лише незначним переходом за межу, або цей перехід дуже значний. VaR лише визначає нижню межу для втрат в хвості розподілу втрат. Ця міра вказує зазвичай оптимістичну тенденцію, а не консервативну, що мала б переважати при керуванні ризиками [78].

Незважаючи на вказані недоліки, міра ризику VaR широко використовується при оцінюванні і прогнозуванні фактичних ризиків. Так, наприклад, у роботі В. Караджич, і Дж. Серовік [79] на основі моделі ARMA-GJRGARCH (Авторегресійне ковзне середнє з умовною дисперсією і узагальненою авторегресійною умовною гетероскедастичністю) оцінюється міра ризику VaR для п'ятих часових рядів фондових індексів країн Західних Балкан, що розвиваються. Авторами проаналізовані щоденні коливання

біржових індексів як до, так і під час світової фінансової кризи 2009 року. Аналіз результатів підтверджує доцільність використання VaR як міри ризику за умови високої волатильності фінансових інститутів.

У роботі В. Коксана і М. Орхана [80] проведено аналіз якості отриманих VaR-оцінок для фондових індексів економічно розвинених країн і країн, що розвиваються, в період сильної волатильності фінансових ринків. Аналіз результатів показує більш високу якість оцінок мір ризику, отриманих для країн, що розвиваються.

У статті А.С. Араужо і М.Т. Гарсія [81], використовуючи міру ризику VaR, аналізуються ризики основних Європейських фондових бірж і проводиться порівняльний аналіз між біржами північноєвропейських країн (британськими, французькими, німецькими) і південноєвропейських країн (італійськими, грецькими, португальськими, іспанськими).

У роботі К. Андриосопулоса і Н. Номикоса [82] розглядаються VaR моделі, які можуть бути використані для аналізу динаміки цін на енергоносії.

Оцінюванню динаміки зміни міри ризику VaR для Шанхайської фондової біржі присвячено статтю С.М. Юна и С. Х. Канга [83]. Для отримання оцінок використовується модель FIAPARCH. (Дробноінтегрована асиметрична потужна авторегресія умовної гетероскедастичності). Розглядаються випадки, коли залишки моделі розподілені по нормальному закону і мають t - розподіл.

Аналізу чотирьох грецьких фондових бірж присвячено статтю Т. Ангелидиса и А. Беноса [84]. Для отримання прогнозних значень міри ризику використовуються моделі GARCH, EGARCH і TARCH (Порогова гетероскедастична модель), розглядаються три випадки розподілу залишків моделі - нормальний, t -розподіл і асиметричний t -розподіл.

Наявність недоліків міри ризику VaR призвело до появи міри Conditional Value-at-Risk (CVaR) або, як її ще називають, Expected Shortfall (ES). Ця міра ризику була введена в 1999 році в роботі Р. Артзнера, Ф. Делбаєна, Дж. Ебера і Д. Хіта [75]. Дещо пізніше Р.Т. Рокафелларом і С.П.

Урясьєвим було дано альтернативне визначення CVaR [85]. В даний час існує досить велика кількість робіт, в яких досліджені властивості CVaR, проведено порівняльний аналіз VaR і CVaR, наприклад, [76], [78], [86]. Як інструмент в оптимізаційному моделюванні, CVaR має певні переваги над VaR. CVaR є когерентною мірою ризику і є характеристикою усереднення, яка дозволяє кількісно визначити втрати, в разі якщо граничне значення VaR буде перевищено [85] - [91]. Важливою перевагою CVaR є те, що вона має інтегральне представлення, а отже опукла та неперервна, в той час, коли VaR не є опуклою функцією, що не дозволяє використовувати її в оптимізаційних процесах [78], [87], [91].

У міри CVaR також є недоліки. CVaR більш чутлива до похибок моделі. Оцінки CVaR сильно залежать від точності моделювання хвоста розподілу, для якого часто не вистачає даних. Крім того, CVaR є неефективним для розподілів випадкових величин з товстими хвостами, що є істотним недоліком в порівнянні з VaR, а також у випадку, коли задача формулюється у вигляді вимог по надійності (обмеження на ймовірності) [78], [87]. Такі задачі можна звести до задачі з VaR критерієм, але не з CVaR.

Водночас, CVaR є узгодженою з VaR мірою, в тому плані, що дає такі ж результати у випадку, коли розрахунки VaR виконуються для стандартних ситуацій, наприклад, якщо розподіл нормальний, або, можливо, еліптичний [85], [78]. CVaR, на відміну від VaR, може бути досить просто змодельована і спрогнозована, що дозволяє використовувати її в якості верхньої оцінки VaR. З огляду на вищесказане, доцільним є при вирішенні конкретних завдань використовувати обидві характеристики.

Популярність CVaR як міри для оцінювання та прогнозування ризиків підтверджує значна кількість наукових публікацій, в яких аналізуються вже відомі методи для оцінювання і прогнозування CVaR, пропонуються нові підходи, проводиться аналіз реальних часових рядів на основі отриманих CVaR – оцінок. Так у роботі С. Надараяна, Бо Жанга і С. Чана [92] описано більшість наявних методів, що надають явні формули для оцінювання CVaR.

Оптимізаційний підхід до знаходження CVaR викладено в роботах Р. Рокфеллера і С. Урясьєва [85], [87], [91]. Непараметричні методи оцінювання можна знайти, наприклад, в роботах [93], [94], [95]. Велика кількість робіт присвячена методам знаходження оцінок мір ризику, які базуються на стохастичній моделі часового ряду. Основи підходу описані, наприклад в [2], [7]. Крім того, більш детально з особливостями методології можна ознайомитися в роботах [3], [96].

Наведемо декілька прикладів практичного застосування CVaR до аналізу і прогнозуванню фінансових часових рядів. Прогнозування CVaR для індексу S&P 500 за період з 01.01.1990 по 31.12.2010 з використанням різних моделей GARCH класу і теорії EVT проведено в статті Д. Гуєгана та Х. Жао [97]. У роботі, використовуючи статистичні тести, проаналізовано якість отриманих короткострокових і довгострокових прогнозів. У роботі Г.Б. Солтана, А. Караа, і М. Беллала [98] прогнозування CVaR здійснюється на основі моделі GARCH з використанням теорії EVT. Розглянутий підхід апробується на часовому ряді туніського фондового ринкового індексу Tunindex за період 2006-2011 роки.

Поява великої кількості різних методів і підходів для оцінювання та прогнозування мір ризику VaR і CVaR призвело до необхідності їх систематизації методами системного аналізу. Загальний апарат системного аналізу, його підходи до розв'язання проблем аналізу складних систем та вирішення конфліктних ситуацій описані, наприклад, у роботах М.З. Згуровського та Н.Д. Панкратової [99], [100]. У роботі Н.Г. Зражевської [101] проводиться аналіз наявних підходів до оцінювання мір статичних ризиків VaR і CVaR. У роботі О.Г. Зражевського та Н.Г. Зражевської [102]. методи системного аналізу застосовуються для аналізу найбільш популярних методів оцінювання мір ризику VaR і CVaR для однієї випадкової величини. Проведена систематизація методів шляхом приведення описаних методів до єдиних позначень. В якості випадкової величини розглянута дохідність фінансового інструменту, що полегшує фінансовому аналітику аналіз ринку.

У роботі запропонована класифікація методів у вигляді структурно-ієрархічної схеми, що допомагає користувачеві вибрати конкретний метод. Проблемам системного аналізу підходів до оцінювання мір динамічних ризиків присвячено роботи Н.Г.Зражевської [103], [104], [105]. У роботах наводиться короткий опис найбільш популярних методів, рекомендації по їх застосуванню, проаналізовані переваги і недоліки. Проведено систематизацію та класифікацію методів. Систематизація методів оцінювання надає користувачеві упорядкований набір методів дослідження і позбавляє його від необхідності проведення трудомісткого пошуку та аналізу відповідних методик оцінювання мір ризику. Запропонована класифікаційна таблиця істотно спрощує вибір найкращого методу оцінювання, зводячи процес вибору до виконання та аналізу результатів системи тестів, також описаних в роботі. Застосування класифікаційної схеми, а також, її ефективність ілюструється оцінюванням мір динамічних ризиків для штучно згенерованого ряду і двох часових рядів логарифмічної дохідності на денній основі найбільш відомих азіатських фондових індексів: японського Nikkei 225 і китайського CSI300.

Проведений огляд досліджень, що стосуються теорії моделювання та прогнозування часових рядів зі специфічними властивостями, зокрема такими, як сильна залежність, теорії оцінювання та прогнозування мір ризику VaR і CVaR свідчить про велике значення цих досліджень для вирішення практичних задач та їх актуальність на сучасному етапі розвитку науки. Незважаючи на значний обсяг робіт, присвячених цій тематиці, та значні досягнення у розвитку як теоретичних, так і практичних її аспектів, існує ряд проблем, що потребують вирішення. Ці проблеми пов'язані із необхідністю побудови нових методів оцінювання та прогнозування мір ризику, які здатні більш досконало враховувати особливості вхідних даних, а, отже, отримувати більш якісні прогнозні значення. Крім того, стрімкий розвиток галузі, поява нових методів і підходів вимагає проводити систематизацію і класифікацію наявних підходів та алгоритмів, що дасть можливість більш

глибоко і повно проаналізувати поставлену задачу та вибрати оптимальний шлях для її розв'язання.

РОЗДІЛ 2

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ ЧАСОВИХ РЯДІВ. КЛАСИЧНІ МЕТОДИ ОЦІНЮВАННЯ МІР СТАТИЧНИХ І ДИНАМІЧНИХ РИЗИКІВ VaR І CVaR

У даному розділі дисертаційної роботи досліджуються проблеми моделювання та прогнозування часових рядів. Розглядаються підходи та методи, які базуються на різній апіорній інформації щодо досліджуваних явищ та характеризуються різними специфічними вимогами щодо подальшого використання відновлених залежностей. Однією з важливих похідних задач моделювання і прогнозування часових рядів є задача оцінювання і прогнозування мір ризику VaR і CVaR. В розділі дається огляд сучасних підходів і методів, що можуть бути використані при оцінюванні цих мір ризику.

2.1. Систематизація моделей, що описують часові ряди

2.1.1. Основні означення та моделі часових рядів. Будуючи економетричні моделі, ризик-менеджери найчастіше використовують стандартний показник - дохідність активів. В економетриці за дохідність виступають різні фінансові показники [2], [3], [7], [106], наприклад, $X_t = P_t - P_{t-1}$, де P_t - ціна фінансового інструменту в момент часу t , відносний

дохід (return): $R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1$. Найбільш часто розглядають прологарифмоване

відношення цін: $X_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = \ln(R_t + 1)$, оскільки в цьому випадку немає

прив'язки до конкретних грошових виразів і таке визначення дозволяє масштабувати різку зміну ціни. При отриманні часового ряду, як реалізації стохастичного процесу, істотне значення має період часового зсуву отримання значень випадкової величини. В економетричних додатках цей період може змінюватися від 1 хвилини до 1 року. У даній роботі вважається,

що послідовні (впорядковані за часом) значення часового ряду при зміні індексу на 1 відрізняються на одиничний період. Якщо потрібно розглянути дохідність на періоді часу, що кратний основному періоду з кратністю k , під дохідністю розуміють $X_t^k = \ln \frac{P_t}{P_{t-k}} = \ln(R_t^k + 1)$ [2].

Очевидно, що в разі $P_t < P_{t-1}$, дохідність, логарифмічна відносна дохідність будуть негативними. Негативну дохідність називають втратами. У разі, коли розглядається питання оцінки ризиків, зазвичай говорять про випадкову величину втрат (негативну дохідність).

Формалізуючи дохідність як випадкову величину, що залежить від моментів часу, отримуємо часовий ряд $\{X_t, t \in Z\}$. Припускаємо, що $\{X_t, t \in Z\}$ може бути описаний деякою стохастичною моделлю, яку, не втрачаючи загальності, будемо позначати так само. Тобто, при фіксованому значенні $t \in T$ X_t є випадковою величиною і, відповідно, $\{X_t, t \in Z\}$ є деякий стохастичний процес, якому відповідає набір скінченно вимірних розподілів $F(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k) = P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_k} \leq x_k)$, $k \in N$.

Наведемо основні визначення і поняття з теорії рядів, що використовуються в даній роботі [2].

Автоковаріацією часового ряду з лагом l називається $Cov(X_t, X_{t-l}) = \gamma_l$. Підкреслимо дві властивості автоковаріації: дисперсія часового ряду дорівнює γ_0 : $Var(X_t) = \gamma_0$ та $\gamma_{-l} = \gamma_l$.

Часовий ряд $\{X_t, t \in Z\}$ називається строго стаціонарним, якщо спільний розподіл $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k})$ збігається з розподілом $(X_{t_1+l}, X_{t_2+l}, \dots, X_{t_k+l})$ для довільного фіксованого $l \in Z$ і довільних (t_1, \dots, t_k) . Ряд називається слабо стаціонарним, якщо математичне сподівання $E(X_t) = \mu$ і коваріація між X_t та X_{t-l} є функцією лага: $Cov(X_t, X_{t-l}) = \gamma_l$ для будь-якого $l \in Z$.

У фінансовій літературі прийнято вважати, що ряд дохідностей або ряд його квадратів є слабо стаціонарним. При наявності достатнього числа даних цей факт може бути перевірений емпірично [2].

Автокореляцією часового ряду з лагом l називається кореляційний коефіцієнт між X_t і X_{t-l} . Автокореляція позначається, зазвичай, $\rho_l = \text{Corr}(X_t, X_{t-l})$ і за умови слабкої стаціонарності ряду є функцією тільки лагу l : $\rho_l = \frac{\gamma_l}{\gamma_0}$. З визначення випливає, що $\rho_0 = 1$, $\rho_l = \rho_{-l}$, $-1 \leq \rho_l \leq 1$.

Залежність ρ від l називається автокореляційною функцією (АКФ).

Розглянемо значення часового ряду $\{X_t, t=1, \dots, N\}$. Вибіркове середнє, вибіркова дисперсія і вибіркова автокореляція (для слабо стаціонарного ряду) з лагом l можуть бути визначені, відповідно, як:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N X_t, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^N (X_t - \hat{\mu})^2, \quad \hat{\rho}_l = \frac{\sum_{t=l+1}^N (X_t - \hat{\mu})(X_{t-l} - \hat{\mu})}{\sum_{t=1}^N (X_t - \hat{\mu})^2}, \quad 0 \leq l < N-1. \quad (2.1)$$

При деяких дуже загальних умовах, $\hat{\rho}_l$ є спроможна оцінка для ρ_l [2]. Статистики $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \dots$ називаються вибірковою АКФ.

Часовий ряд $\{X_t, t \in Z\}$ називається лінійним, якщо він може бути записаний у вигляді:

$$X_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}, \quad (2.2)$$

де середнє $\mu = \text{const}$, $\psi_0 = 1$, $\psi_i \in R$ - вагові функції, $\{\varepsilon_t\}$ - послідовність незалежних, однаково розподілених випадкових величин (iid) із середнім рівним 0 і скінченною дисперсією $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$: $\{\varepsilon_t\} \stackrel{iid}{\sim} F(0, \sigma^2)$. Якщо $\sigma^2 \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$, то $\{X_t, t \in Z\}$ є слабо стаціонарним (тобто перші два моменти не залежать від часу). Часовий ряд, який не може бути представлений у вигляді (2.2), називається нелінійним.

У загальному вигляді стохастична модель часового ряду може бути записана у вигляді: $X_t = f(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots)$. Для лінійної моделі функція $f(\cdot)$ є лінійною функцією своїх аргументів, для нелінійної функція $f(\cdot)$ нелінійна. Позначимо через F_{t-1} множину, що містить всю інформацію про ряд, відому до моменту часу $t-1$ включно. Через $E_{t-1}[\cdot]$ і $Var_{t-1}[\cdot]$ будемо позначати умовне математичне сподівання і умовну дисперсію, що задані на інформаційній множині F_{t-1} . Тоді: $\mu_t = E_{t-1}[X_t] \equiv g(F_{t-1})$, $\sigma_t^2 = Var_{t-1}[X_t] \equiv h(F_{t-1})$, $h(\cdot) \geq 0$.

Особливе значення в застосуваннях мають моделі, які можуть бути записані у вигляді:

$$X_t = g(F_{t-1}) + \sigma_t Z_t = g(F_{t-1}) + \sqrt{h(F_{t-1})} Z_t,$$

де $Z_t = \varepsilon_t / \sigma_t$, $\{Z_t\} \stackrel{iid}{\sim} F(0,1)$. Якщо $g(\cdot)$ нелінійна функція, то кажуть, що модель X_t є нелінійною за середнім, якщо функція $h(\cdot)$ змінюється в часі, то кажуть, що модель X_t є нелінійною за дисперсією.

Моделі ARMA - класу є широко відомими представниками лінійних моделей. Прикладом нелінійних за дисперсією моделей є моделі GARCH класу. До нелінійних за середнім моделям відносяться білінійні моделі Грангера і Андерсена, порогова авторегресійна модель Тонга (TAR) і її модифікації. Умовне середнє в цих моделях змінюється в часі відповідно до деякої параметричної нелінійної функції [2].

2.1.2. Авторегресійні моделі часових рядів. Модель авторегресії q -го порядку $AR(q)$ одна з самих популярних і простих лінійних моделей, що часто використовуються в аналізі часових рядів [7], [2], [106]. Модель передбачає, що значення ряду в момент часу t визначається через q його попередніх значень:

$$X_t = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i X_{t-i} + v_t, \quad \{v_t\} \stackrel{iid}{\sim} F(0, \sigma^2), \quad (2.3)$$

де $a_i, i = \overline{1, q}$ - коефіцієнти авторегресії, q - порядок авторегресії. Застосовуючи оператор зсуву $LX_t = X_{t-1}$, (2.3) можна записати у вигляді: $(1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i L^i) X_t = \alpha_0 + v_t$. Для стаціонарності процесу достатньо, щоб всі корені характеристичного полінома $\alpha(z) = 1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i z^i$ лежали поза одиничним колом в комплексній площині: $|z| > 1$. На практиці часто користуються необхідною умовою стаціонарності: $|\sum_{i=1}^q \alpha_i| < 1$ [7].

Для знаходження коефіцієнтів авторегресії може бути використана система рівнянь Юла – Уокера [7]:

$$\sum_{j=1}^q \rho_{|i-j|} a_j = \rho_i, \quad i = 1, \dots, q, \quad (2.4)$$

де $\rho_i, i = 1, \dots, q$ - оцінки АКФ часового ряду X_t , визначені формулою (2.1).

У випадку, коли $\{v_t\}$ розподілені по нормальному закону $\{v_t\} \sim N(0, \sigma^2)$, для знаходження коефіцієнтів авторегресії можна використовувати ММП [2], [7], [46]. Враховуємо, що $E[v_t] = 0$, $Var[v_t] = \sigma^2$, $Var[X_t] = \sigma_x^2$. Вважаємо $\{X_t\}$ стаціонарним в широкому сенсі, $\{X_t, t = 1, \dots, N\}$ - значення часового ряду. Оцінимо параметри моделі авторегресії $\vec{a} = (a_1, \dots, a_q)'$ і σ^2 за ММП. Для гаусівського вектора $\vec{X}^{q+N} = (X_1, \dots, X_q, X_{q+1}, \dots, X_{q+N})$ функція максимальної правдоподібності може бути записана у вигляді:

$$f(\vec{X}^{q+N}; \vec{a}; \sigma) = (2\pi)^{-(q+N)/2} \sigma^{-N} |\det R_{q+N}|^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{S(\vec{a})}{2\sigma^2} \right\},$$

$R_{q+N} = \|R(k-j)\|_{k,j=\overline{1, q+N}}$ - автокореляційна матриця вектора \vec{X}^{q+N} ,

$S(a) = \sigma^2 \left(R_q^{-1} X^q, X^q \right) + \sum_{k=1}^N \left(X_{q+N} - \sum_{j=1}^q a_j X_{q+k-j} \right)^2$. Для знаходження оцінок

параметрів \vec{a} і σ^2 розглядається задача максимізації функції $f(\vec{X}^{q+N}; \vec{a}; \sigma)$, яка зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

АКФ авторегресіонного процесу експоненціально згасає з можливою осциляцією (осциляція залежать від наявності комплексних коренів у характеристичного полінома). При цьому часткова АКФ при $k > q$ дорівнює нулю. Ця властивість використовується для ідентифікації порядку q AR-моделі по вибірковій частковій АКФ часового ряду [2], [7]. Для визначення порядку моделі q , можуть бути також використані інформаційні критерії, наприклад, інформаційний критерій Акаїке (AIC), критерій Хеннена - Куїна [47], [7].

2.1.3. Моделі умовної гетероскедастичності. Зупинимося детальніше на моделях із змінною варіацією [106].

Розглядаємо часовий ряд $\{X_t, t = 0, 1, 2, \dots\}$ записаний у вигляді:

$$X_t = u + \varepsilon_t, \varepsilon_t = \sigma_t Z_t, \quad (2.5)$$

де $\{Z_t\}$ незалежні, однаково розподілені із середнім 0 і дисперсією 1, $u = \text{const}$.

Процес, для якого $E_{t-1}[\varepsilon_t] = 0$, а умовна дисперсія $\sigma_t^2 = E_{t-1}[\varepsilon_t^2]$ представляється як лінійна функція квадратів попередніх значень процесу:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2, \quad \omega > 0, \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, q. \quad (2.6)$$

називається процесом авторегресійної умовної гетероскедастичності - ARCH(q). Процес є слабо стаціонарним тоді і тільки тоді, коли $\sum_{i=1}^q \alpha_i < 1$ [45].

Формули (2.5) і (2.6) визначають модель ARCH(q). Для визначення порядку моделі q може бути використана часткова автокореляційна функція. Для визначення параметрів моделі - метод найменших квадратів (МНК) або ММП. Функції максимальної правдоподібності в припущенні, що залишки

моделі мають нормальний розподіл або розподіл Стюдента, приведені, наприклад, в [2].

Показано [2], [7], [45], що процес ARCH(q) може бути записаний у вигляді авторегресійного процесу AR(q). Якщо покласти

$$\sigma_t^2 = \varepsilon_t^2 - v_t, \quad (2.7)$$

де v_t - некорельовані з середнім 0, то з (2.6) маємо:

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + v_t. \quad (2.8)$$

GARCH(p,q) є узагальненням процесу ARCH(q). За цією моделлю умовна дисперсія залежить не тільки від квадратів попередніх значень процесу, а й від попередніх значень самої умовної дисперсії:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad (2.9)$$

$\omega > 0$; $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, q$; $\beta_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, p$; $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$ [2], [45].

Застосовуючи оператор зсуву $LX_t = X_{t-1}$, можна переписати (2.6) і (2.9) в операторному вигляді відповідно:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(L) \varepsilon_t^2, \quad (2.10)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(L) \varepsilon_t^2 + \beta(L) \sigma_t^2, \quad (2.11)$$

де $\alpha(L) = \sum_{i=1}^q \alpha_i L^i$, $\beta(L) = \sum_{j=1}^p \beta_j L^j$. Формально, враховуючи (2.7), (2.11)

можна записати у вигляді: $(1 - \alpha(L) - \beta(L)) \varepsilon_t^2 = \omega + (1 - \beta(L)) v_t$.

Модель, для якої $\alpha(1) + \beta(1) = 1$, називається IGARCH:

$$\varphi(L)(1 - L) \varepsilon_t^2 = \omega + (1 - \beta(L)) v_t, \quad (2.12)$$

де оператор $\varphi(L) \equiv (1 - \alpha(L) - \beta(L))(1 - L)^{-1}$ має порядок $m - 1$, $m = \max(p, q)$.

Модель FIGARCH(p,d,q) записується у вигляді [7], [45]:

$\varphi(L)(1 - L)^d \varepsilon_t^2 = \omega + (1 - \beta(L)) v_t$, або

$$(1 - \beta(L)) \sigma_t^2 = \omega + (1 - \beta(L) - \varphi(L)(1 - L)^d) \varepsilon_t^2, \quad (2.13)$$

де $\omega > 0$; $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, q$; $\beta_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, p$; $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$,

$(1 - L)^d = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(-d)\Gamma(j+1)} (-L)^j$ - оператор дробової різниці ($\Gamma(\cdot)$ -гамма

функція). Якщо $d \in (0, 1/2)$, то модель описує часові ряди з сильною залежністю з параметром Херста $H = 1/2 + d$.

Модель (2.13) можна переписати у вигляді:

$$\sigma_t^2 = (1 - \beta(1))^{-1} \omega + \lambda(L) \varepsilon_t^2, \quad (2.14)$$

або:

$$\varepsilon_t^2 = (1 - \beta(1))^{-1} \omega + \lambda(L) \varepsilon_t^2 + v_t, \quad (2.15)$$

де $\lambda(L) \equiv 1 - (1 - \beta(L))^{-1} \varphi(L)(1 - L)^d$. При цьому $\lambda(L) = \lambda_1 L + \lambda_2 L^2 + \lambda_3 L^3 + \dots$

Модель FIGARCH(p,d,q) (2.15) коректно визначена за умови $\lambda_k > 0$, $k=0,1,2,\dots$. Таким чином, FIGARCH(p,d,q) можна визначити як модель ARCH(∞) для дисперсії часового ряду (представлення (2.14)), або як модель AR(∞) для квадратів процесу $\{\varepsilon_t^2\}$ (представлення (2.15)).

2.1.4. Прогнозування часових рядів. Прогнозування є важливим застосуванням теорії часових рядів. Розглянемо питання прогнозування на основі моделі AR(q) [2], [107], [108].

Припустимо, що даний момент часу h і множина F_h містить всю відому на даний момент часу інформацію про ряд. Потрібно отримати прогнозне значення ряду X_{h+l} в момент часу $h+l$. Значення $l \geq 1$ називається горизонтом прогнозу. Прогнозним значенням на l кроків вперед часового ряду X_t в момент часу h будемо називати значення $\hat{X}_h(l)$, визначене в сенсі нерівності:

$$E_h[(X_{h+l} - \hat{X}_h(l))^2] \leq \min_g E_h[(X_{h+l} - g)^2],$$

де g - функція, визначена на множині F_h . У відповідності до (2.3) маємо:

$$X_{h+1} = a_0 + a_1 X_h + \dots + a_q X_{h+1-q} + v_{h+1}.$$

Тоді, відповідно до визначення, прогнозне значення на 1 крок вперед визначається як: $\hat{X}_h(1) = E_h[X_{h+1}] = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i X_{h+1-i}$ і помилка прогнозу:

$$e_h(1) = X_{h+1} - \hat{X}_h(1) = \varepsilon_{h+1}.$$

Аналогічно, щоб отримати прогнозне значення на 2 кроки вперед, розглянемо:

$$X_{h+2} = a_0 + a_1 X_{h+1} + \dots + a_q X_{h+2-q} + v_{h+2}.$$

Тоді $\hat{X}_h(2) = E_h[X_{h+2}] = a_0 + a_1 \hat{X}_h(1) + a_2 X_h + \dots + a_q X_{h+2-q}$ і помилка прогнозу:

$$e_h(2) = X_{h+2} - \hat{X}_h(2) = v_{h+2} + \alpha_1 v_{h+1}.$$

У загальному вигляді, l кроковий прогноз можна отримати на підставі формули: $X_{h+l} = a_0 + a_1 X_{h+l-1} + \dots + a_q X_{h+l-q} + v_{h+l}$ у вигляді:

$$\hat{X}_h(l) = E_h[X_{h+l}] = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \hat{X}_h(l-i), \quad (2.16)$$

де $\hat{X}_h(i) = X_{h+i}$ для $i \leq 0$. З (2.16) випливає, що для знаходження прогнозного значення $\hat{X}_h(l)$ треба послідовно знайти прогнозні значення $\hat{X}_h(i)$, $i=1, \dots, l-1$. Помилка l крокового прогнозу знаходиться за формулою: $v_h(l) = X_{h+l} - \hat{X}_h(l)$.

2.1.5. Статистичні тести, що використовуються при аналізі часових рядів. Для перевірки, чи буде розподіл нормальним, може бути використаний тест Харке-Бера [2]. Нехай X - випадкова величина, X_1, X_2, \dots, X_N - вибірка її значень. Вибіркові моменти третього порядку - коефіцієнт асиметрії (skewness) і четвертого порядку - куртозис (kurtosis) визначаються, відповідно, формулами:

$$\hat{S}(X) = \frac{1}{(N-1)\hat{\sigma}_x^3} \sum_{t=1}^N (X_t - \hat{\mu})^3, \quad \hat{K}(X) = \frac{1}{(N-1)\hat{\sigma}_x^4} \sum_{t=1}^N (X_t - \hat{\mu})^4,$$

де $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}_x^2$ - вибіркові середнє і дисперсія, визначені за формулою (2.1).

Розглядаються гіпотези:

$$H_0 : S(X) = 0, K(X) - 3 = 0 \text{ (розподіл } X \text{ є нормальним),}$$

$$H_1 : S(X) \neq 0, K(X) - 3 \neq 0 \text{ (} X \text{ не має нормального розподілу).}$$

Розглядається статистика:
$$JB = \frac{\hat{S}^2(X)}{6/T} + \frac{[\hat{K}(X) - 3]^3}{24/T},$$
 яка в разі

нормальності розподілу має розподіл χ^2 з 2 ступенями свободи. Часто на практиці використовується p -значення статистики. Гіпотеза H_0 відхиляється, якщо $p < \alpha$, де α - рівень значущості критерію.

Для аналізу залежності членів ряду від m своїх значень в попередні моменти часу може бути використаний **критерій Льюнга-Бокса** [2]. Критерій Льюнга-Бокса - це статистичний критерій для виявлення автокорельованості часових рядів. Висуваються дві гіпотези:

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_m = 0 \text{ (дані статистично незалежні),}$$

$$H_1 : \rho_i \neq 0 \text{ хоча б для одного } i \in \{1, \dots, m\} \text{ (дані не є незалежними).}$$

Знаходиться статистика:
$$Q(m) = N(N+2) \sum_{k=1}^m \frac{\hat{\rho}_k^2}{N-k}.$$
 Гіпотеза H_0

відхиляється і визнається наявність автокореляції до m -го порядку включно, якщо $Q(m) > \chi_\alpha^2(m)$, α - рівень значущості критерію, $\chi_\alpha^2(m)$ - $(1-\alpha)$ -квантиль розподілу χ^2 з m ступенями свободи. Якщо знайдено p -значення статистики, то гіпотеза H_0 відхиляється, якщо $p \leq \alpha$.

Тест Діболда-Маріано (Diebold-Mariano test) може бути використаний для порівняння якості прогнозів часового ряду, отриманих за двома прогнозними моделями [109].

Нехай $\{X_t\}$ - часовий ряд, який прогнозується. $X_h^1(l)$ і $X_h^2(l)$ - два побудовані прогнози, які порівнюються. Похибки прогнозів цих моделей позначаються, відповідно, $e_h^1(l) = X_{h+l} - \hat{X}_h^1(l)$ і $e_h^2(l) = X_{h+l} - \hat{X}_h^2(l)$.

Прогноз на l кроків був побудований для $h = t_0, \dots, T$. Таким чином, є дві послідовності похибок прогнозів: $\{e_h^1(l)\}_{t_0}^T$ і $\{e_h^2(l)\}_{t_0}^T$. Оскільки l - кроковий прогноз використовує дані, що часто повторюються, отримані послідовності похибок будуть корельовані.

Нехай точність кожного прогнозу вимірюється функцією втрат: $L(y_{h+l}, y_h^i(l)) = L(e_h^i(l))$, $i = 1, 2$. В якості такої функції вибирається функція квадратів похибки: $L(e_h^i(l)) = (e_h^i(l))^2$, $i = 1, 2$.

Для порівняння моделей перевіряється основна гіпотеза: $H_0 : E[L(e_h^1(l))] = E[L(e_h^2(l))]$. Тоді альтернативна гіпотеза $H_1 : E[L(e_h^1(l))] \neq E[L(e_h^2(l))]$. Нехай $d_t = L(e_h^1(l)) - L(e_h^2(l))$. Тоді гіпотеза $H_0 : E[d_t] = 0$. Перевіряється гіпотеза H_0 з використанням

статистики:
$$\widehat{DM} = \frac{\bar{d}}{(\widehat{LRV}_{\bar{d}} / T)^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{де} \quad \bar{d} = \frac{1}{T_0} \sum_{t=t_0}^T d_t,$$

$\widehat{LRV}_{\bar{d}} = \hat{\gamma}_0 + 2 \sum_{j=1}^{T-T_0} \hat{\gamma}_j$, $\hat{\gamma}_j = \text{Cov}(d_t, d_{t-j})$. $LRV_{\bar{d}}$ - оцінка асимптотичної дисперсії для $\sqrt{T}\bar{d}$. Якщо взяти рівень значущості $\alpha = 0.05$, то при $|\widehat{DM}| < 1.96$ прогнози є подібними, в іншому випадку суттєво різняться.

Для аналізу, чи є випадкові величини незалежними (iid-tests), розглянемо критерій відношення дисперсій і BDS-тест.

Критерій відношення дисперсій [110]. Розглядається гіпотеза: H_0 : $\{X_t, t=1, \dots, N\}$ - iid з нульовим середнім і дисперсією σ^2 . Тоді, якщо гіпотеза H_0 виконується, дисперсія для $X_t + \dots + X_{t+k-1}$ буде $k\sigma^2$. Позначимо через σ^2 і $\hat{\sigma}_k^2$ оцінки для σ^2 і $k\sigma^2$ відповідно, побудовані за

вибіркою. Очевидно, за умови виконання гіпотези, $\hat{\sigma}_k^2 / k$ буде близько до $\hat{\sigma}^2$. Оцінки $\hat{\sigma}^2$ і $\hat{\sigma}_k^2$ можуть бути знайдені наступним чином. Позначимо через η_t часткову суму X_t : $X_t = \eta_t - \eta_{t-1}$. Вважаємо, що маємо $kN+1$

значень η_0, \dots, η_{kN} . Тоді:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{kN-1} \sum_{t=1}^{kN} (\eta_t - \eta_{t-1} - \bar{y})^2,$$

$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{M} \sum_{t=k}^{kN} (\eta_t - \eta_{t-k} - k\bar{y})^2$, де $M = \frac{kN-k+1}{1-1/N}$, $\bar{y} = \frac{1}{kN} \sum_{t=1}^{kN} (\eta_t - \eta_{t-1})$. Якщо

$\frac{\sqrt{kN}(\hat{\sigma}_k^2 / \hat{\sigma}^2 - 1)}{\sqrt{2(k-1)}} \sim N(0,1)$, то гіпотеза H_0 приймається.

BDS-тест [111]. Гіпотеза H_0 : $\{X_t, t=1, \dots, N\}$ - *iid*. BDS-тест заснований на обчисленні BDS-статистики $W_{m,N}(\varepsilon)$ з двома параметрами ε і m . Алгоритм знаходження статистики наступний. За вибіркою X_1, \dots, X_N знаходиться набір векторів $X_t^m = (X_t, \dots, X_{t+m-1})$, $t = \overline{1, N-m+1}$.

Обчислюється $C_{N,m}(\varepsilon) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{s=1}^{\bar{n}-1} \sum_{t=s+1}^{\bar{n}} I_\varepsilon \{\|X_s^m - X_t^m\|\}$, де $\bar{n} = N-m+1$,

$I_\varepsilon \{x\} = \begin{cases} 1, & x \in [0, \varepsilon) \\ 0, & x \notin [0, \varepsilon) \end{cases}, \|x\| = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$. Знаходиться BDS-статистика

$W_{m,N}(\varepsilon) = \sqrt{N} (C_{m,N}(\varepsilon) - [C_{1,N}(\varepsilon)]^m) / V_{m,N}(\varepsilon)$, де $V_{m,N}(\varepsilon)$ знаходиться з рівняння:

$$\frac{1}{4} V_{m,N}^2(\varepsilon) = m(m-2)C^{2m-2}(k-C^2) + k^m - C^{2m} + 2 \sum_{j=1}^{m-1} C^{2j}(k^{m-j} - C^{2m-2j}) -$$

$$-mC^{2m-2}(k-C^2), C = \frac{1}{N^2} \sum_{s=1}^N \sum_{t=1}^N I_\varepsilon \{|x_s - x_t|\},$$

$$K = \frac{1}{N^3} \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \sum_{t=1}^N I_\varepsilon \{|x_r - x_s|\} I_\varepsilon \{|x_s - x_t|\}.$$

Гіпотеза H_0 приймається, якщо $W_{m,N}(\varepsilon) \sim N(0,1)$, $N \rightarrow \infty$.

При виборі параметрів m, ε слід дотримуватися наступних оцінок:

$$N/m > 200, \varepsilon/\sigma \in [1/2, 2], \text{ де } \sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}, m \in \{2, 3, 4, 5\}.$$

2.2. Основні статистичні методи визначення сильної залежності

2.2.1. Основні означення та підходи до встановлення сильної залежності в часових рядах. Нехай $\{X_t, t=1, 2, \dots\}$ - часовий ряд, стаціонарний в широкому сенсі. У літературі наведено кілька альтернативних визначень сильної залежності [9], [10]. Наведемо два з них.

Означення 1. Часовий ряд $\{X_t, t=1, 2, \dots\}$ з автокореляційною функцією $\rho_k = \text{Corr}(X_t, X_{t+k})$, $k \in N \cup \{0\}$, підпорядковується сильній залежності (довгострокової залежності або залежності з дальнім радіусом), якщо існують параметр $0 < \alpha < 1$ і константа $c_\rho > 0$ такі, що:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k / (c_\rho k^{-\alpha}) = 1. \quad (2.17)$$

Таким чином, АКФ такого ряду повільно спадає і це, відповідно, призводить до розбіжності ряду: $\sum_k \rho(k) = \infty$.

В іншому випадку, кажуть, що процес підпорядковується слабкій залежності.

Від автокореляційної функції ρ_k за допомогою перетворення Фур'є можна перейти до спектральної щільності $f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k e^{ik\omega}$ і сформулювати визначення сильної залежності в наступному вигляді.

Означення 2. Часовий ряд $\{X_t, t=1, 2, \dots\}$ підпорядковується сильній залежності, якщо існують параметр $0 < \beta < 1$ і константа $c_f > 0$ такі, що:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} f(\omega) / (c_f |\omega|^{-\beta}) = 1. \quad (2.18)$$

У роботі [9] доведено еквівалентність означень 1 і 2 ((2.17) і (2.18)), а також вказується явний вид зв'язку констант c_ρ і c_f , α і β . Зокрема, показано, що: $\alpha = 2 - 2H$ і $\beta = 2H - 1$. З обмежень на параметри α і β випливає, що параметр Херста для рядів з сильною залежністю задовольняє нерівність: $1/2 < H < 1$.

Виходячи з наведених означень, поняття сильної залежності може бути розглянуто в двох аспектах. Сильно залежні ряди мають досить високу кореляцію між своїми значеннями в моменти часу t_0 і $t_0 + T$ для досить великих T . Отже, для їх дослідження потрібно розглядати автокореляційні функції з великим часовим лагом, що накладає суттєві обмеження на вибірки даних. Крім того, в просторі параметрів Фур'є для цих рядів характерні значні частотні коливання в околі нуля, що призводить до появи великих похибок при обчисленнях. Тому, незважаючи на досить повне теоретичне дослідження сильно залежних рядів, практичний їх аналіз часто викликає певні труднощі.

2.2.2. Методи оцінювання параметра Херста як міри сильної залежності. Наведемо кілька класичних методів для побудови оцінок Херста, які використовувалися в даній роботі [14], [7], [33]. Вважаємо, що для часового ряду $\{X_t, t=1, 2, \dots\}$ задана вибірка $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$. Послідовність часткових сум часового ряду визначається як: $Y(n) = \sum_{i=1}^n X_i$.

Метод вибіркової дисперсії агрегованого ряду. Розглядається ряд $\{X_t^{(m)}, t=1, 2, \dots\}$, отриманий з ряду $\{X_t, t=1, 2, \dots\}$ шляхом усереднення по блокам довжини $m \in \mathbb{N}$: $X^{(m)}(k) = \frac{1}{m} \sum_{i=(k-1)m+1}^{km} X_i$, де $k \geq 1$ індексує блок.

Перехід до ряду $\{X_t^{(m)}\}$ називається агрегацією за шкалою часу з параметром m . Для агрегованих часових рядів $\{X_t^{(m)}\}$ з сильною залежністю для достатньо великих m буде мати місце формула

$Var(X^{(m)}) \sim \frac{Var(X)}{m^\alpha}$. Параметр $H = 1 - \frac{\alpha}{2}$ можна відшукати, якщо побудувати агрегований процес на різних рівнях агрегації m і обчислити дисперсію кожного рівня. Отже, для заданого m вибірка X_1, X_2, \dots, X_N розбивається на $\frac{N}{m}$ блоків розмірності m , обчислюється $X^{(m)}(k)$ для $k = 1, 2, \dots, \frac{N}{m}$ і

вибіркова дисперсія
$$\widehat{Var}X^{(m)} = \frac{1}{N/m} \sum_{k=1}^{N/m} (X^{(m)}(k))^2 - \left(\frac{1}{N/m} \sum_{k=1}^{N/m} (X^{(m)}(k)) \right)^2.$$

Процедура повторюється для різних значень m . Графік залежності $\log(\widehat{Var}(X^{(m)}))$ від $\log(m)$ будується, вибираючи значення $m \{m_i, i \geq 1\}$ так, щоб $\frac{m_{i+1}}{m_i} = const$. Для знайдених значень знаходиться лінійна регресія. Нахил регресивної лінії на графіку буде визначати $\alpha = 2H - 2$.

Для того, щоб відрізнити стаціонарні ряди з сильною залежністю від рядів зі слабкою залежністю, але зі зміщеним середнім або з наявністю слабо вираженого лінійного тренда, слід використовувати модифікацію розглянутого вище методу - **метод диференціювання дисперсії**. У цьому методі, замість вибіркової дисперсії використовується її різницева похідна $\widehat{Var}X^{(m_{i+1})} - \widehat{Var}X^{(m_i)}$. Зазначений метод часто використовується в комбінації з базовим методом. Якщо побудований графік вибірових дисперсій має експонентну форму, то виникає підозра в нестаціонарності ряду. В цьому випадку будують графік для різницевої похідних вибіркової дисперсії. Якщо ряд стаціонарний, то обидва методи дають подібні результати для всіх H від $\frac{1}{2}$ до 1. У разі нестаціонарності ряду і для H близьких до $\frac{1}{2}$, метод диференціювання дисперсії буде давати кращий результат. У разі нестаціонарності і H близьких до 1, кількісно визначити параметр Херста неможливо, але можна підтвердити наявність сильної залежності.

У методі абсолютних значень агрегованих рядів замість вибірових дисперсій $\widehat{Var}X^{(m)}$ обчислюються суми абсолютних значень агрегованих рядів, а саме, $S(m) = \frac{1}{N/m} \sum_{k=1}^{N/m} |X^{(m)}(k)|$. Якщо ряд має сильну залежність з параметром H , то графіком лінійної регресійної залежності $\log S(m)$ від $\log(m)$ буде пряма лінія з нахилом $H - 1$.

Розглянута вище методи популярні, оскільки дозволяють отримати досить точні оцінки при невеликих обсягах обчислень.

У методі Хігучі для послідовності часткових сум часового ряду $Y(n)$, обчислюється статистика:

$$L(m) = \frac{N-1}{m^3} \sum_{i=1}^m \left[\frac{N-I}{m} \right]_i^{-1} \sum_{k=1}^{\left[\frac{N-i}{m} \right]} |Y(i+km) - Y(i+km-m)|,$$

де квадратні дужки позначають цілу частину числа. Графік $\log L(m)$ від $\log m$ - пряма лінія з нахилом $2 - H$.

Метод залишків регресії включає наступні кроки.

1. Розбивається вибірка довжини N на блоки довжини m , які попарно не перетинаються.
2. На кожному блоці знаходяться часткові суми $Y(i) = \sum_{k=1}^i X_k, i=1, 2, \dots, m$.
3. Використовуючи МНК, будується по $Y(i)$ лінійна регресія і знаходиться вибіркова дисперсія залишків.
4. Описана процедура повторюється на кожному блоці.
5. Знаходиться середнє отриманих дисперсій $\sigma^2(m)$.
6. Оскільки, для великих m $\sigma(m) \sim m^{2H}$, то на графіку залежності $\log \sigma(m)$ від $\log m$ пряма буде мати нахил $2H$.

R/S -метод або метод нормованого розмаху - один з перших і найбільш відомих методів. Вибіркова дисперсія знаходиться за формулою;

$S^2(n) = (1/n) \sum_{i=1}^n X_i^2 - (1/n)^2 Y(n)^2$. Функція розмаху $R(n)$ визначається наступним чином:

$$R(n) = \max_{0 \leq t \leq n} \left(Y(t) - \frac{t}{n} Y(n) \right) - \min_{0 \leq t \leq n} \left(Y(t) - \frac{t}{n} Y(n) \right).$$

Для рядів з сильною залежністю: $E \left(\frac{R(n)}{S(n)} \right) \sim Cn^H$, $n \rightarrow \infty$, де $C > 0$ стала, яка не залежить від n .

Щоб визначити параметр Херста, вибірка довжини N розбивається на блоки довжини K , що не перетинаються. Для кожного n обчислюється $R(k_i, n) / S(k_i, n)$, $k_i = \frac{iN}{K} + 1$, $i = 1, 2, \dots, k_i + n \leq N$. Значення H визначається відповідно до лінійної регресії, побудованої на точках $\left(\log \left(\frac{R(k_i, n)}{S(k_i, n)} \right), \log n \right)$ для досить великих n .

Основна проблема цього методу - вибір n . Якщо вибрати n недостатньо великим - будуть домінувати короткострокові кореляції, вибір занадто великого n обмежується розміром вибірки.

Метод періодограм використовує оцінку спектральної щільності виду

$$I(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{j=1}^N X_j e^{ij\lambda} \right|^2, \text{ де } \lambda - \text{частота. Оскільки періодограма } I(\lambda) \text{ є}$$

оцінкою спектральної щільності, то за Означенням 2 для сильнозалежних рядів, на графіку залежності $\log(I(\lambda))$ від $\log \lambda$ нахил прямої буде $1-2H$. Значення періодограми розраховуються для послідовності $\lambda_k = 2\pi k / N$, де

$$k = 1, \dots, j, \quad j < \frac{N}{2}.$$

Модифікований метод періодограм враховує той факт, що більшість частот на графіку розташовані в правій частині і, таким чином, істотно впливають на регресійну пряму. У модифікованому методі вісь частот розбита на однакові (в логарифмічному обчисленні) блоки і знаходяться

середні значення періодограм всередині блоків. Значення для низьких частот не враховуються.

2.3. Міри ризику VaR та CVaR: означення, властивості, основні методи оцінювання

Розглянемо імовірнісний простір (Ω, \mathcal{A}, P) , де Ω - множина елементарних подій, \mathcal{A} - σ - алгебра підмножин Ω , P - ймовірнісна міра, визначена на \mathcal{A} .

Ризиком X на (Ω, \mathcal{A}) називається довільне відображення Ω в R (тобто ризик - довільна випадкова величина). Надалі вважається, що $E[|X|] < \infty$.

Нехай X - випадкова величина, що описує втрати фінансового інструменту. Через \mathfrak{N} надалі позначається сукупність усіх ризиків на (Ω, \mathcal{A}) .

Мірою ризику називається довільний функціонал $\rho(X): \mathfrak{N} \rightarrow R$, що задовольняє трьом умовам:

1. нормалізованість: $\rho(0) = 0$;
2. монотонність: для довільних $X, Y \in \mathfrak{N}$ таких, що $X \leq Y$ (тобто випадкова величина Y стохастично домінує випадкову величину X):
 $\rho(X) \leq \rho(Y)$;
3. інваріантність щодо зсуву: для будь-яких $\alpha \in R$ і $X \in \mathfrak{N}$
 $\rho(X + \alpha) = \rho(X) - \alpha$, $\alpha \in R$.

У роботі [75] введено поняття когерентної міри ризику, як міри, що крім вказаних трьох умов задовольняє ще дві умови:

4. позитивна однорідність: $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$ для будь-яких $\lambda \geq 0$ і $X \in \mathfrak{N}$;
5. субаддитивність: $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ для будь-яких $X, Y, X + Y \in \mathfrak{N}$.

2.3.1. Математичне та економетричне означення мір статичних і динамічних ризиків VaR та CVaR. Розглянемо визначення мір ризику VaR та CVaR для випадкової величини. Нехай Y - випадкова величина, що

описує дохідність портфеля. При заданому довірчому рівні $\alpha \in (0;1)$ розглянемо $(1-\alpha)$ - квантиль для функції дохідності: $y_{(1-\alpha)}(Y) = \sup\{y \in R \mid P(Y \leq y) \leq 1-\alpha\}$. З точки зору економетрики $y_{(1-\alpha)}(Y)$ визначає мінімальне значення дохідності Y , яке досягається з ймовірністю $(1-\alpha)$. Якщо, наприклад, $\alpha=0,95$, то $y_{(1-\alpha)}(Y)$ (може бути від'ємним) визначає мінімальну дохідність, яка буде досягнута з імовірністю 95%. Для простоти розуміння в економетриці оперують поняттям $\text{VaR}_\alpha(Y)$, визначеним як:

$$\text{VaR}_\alpha(Y) = -y_{(1-\alpha)}(Y). \quad (2.19)$$

Отже, $\text{VaR}_\alpha(Y)$ - це граничне значення втрат (що визначається знаком «-»), що досягається з ймовірністю $(1-\alpha)$.

У деяких роботах оперують поняттям втрат. Нехай X - випадкова величина, що описує втрати. Тоді при $X = -Y$ квантиль для функції втрат визначається, як $x_{(\alpha)}(X) = \inf\{x \in R \mid P(X \leq x) \geq \alpha\}$ і, відповідно,

$$\text{VaR}_\alpha(X) = x_{(\alpha)}(X). \quad (2.20)$$

Підкреслимо, що в формулах (2.19) і (2.20) мова йде про одну й ту ж величину. Однак, слід пам'ятати, що $\text{VaR}_\alpha(Y) = \text{VaR}_\alpha(X)$, $x_{(\alpha)}(X) = -y_{(1-\alpha)}(Y)$.

З точки зору статистики, з (2.20) випливає:

$$\text{VaR}_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha), \quad (2.21)$$

де $F_X^{-1}(\cdot)$ - обернена функція до функції розподілу випадкової величини X $F(x) = P(X \leq x)$, за умови, що функція розподілу є неперервною і строго зростаючою.

При заданому довірчому рівні α міра ризику $\text{CVaR}_\alpha(X)$ визначається як середньоочікуване значення втрат з ймовірністю α за умови, що втрати перевищують рівень $\text{VaR}_\alpha(X)$:

$$\text{CVaR}_\alpha(X) = E[X | X > \text{VaR}_\alpha(X)]. \quad (2.22)$$

В разі сумовності $\text{VaR}_\gamma(X)$, $(\gamma \in (0; \alpha))$, можна визначити $\text{CVaR}_\alpha(X)$ наступним чином:

$$\text{CVaR}_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 \text{VaR}_\gamma(X) d\gamma.$$

В роботі [92] наведена наступна формула для визначення CVaR:

$$\begin{aligned} \text{CVaR}_\alpha(X) = & \frac{1}{\alpha} [E[X \cdot I\{X \leq \text{VaR}_\alpha(X)\}] + \alpha \text{VaR}_\alpha(X) - \\ & - \text{VaR}_\alpha(X) P(X \leq \text{VaR}_\alpha(X))], \end{aligned}$$

де $I\{\cdot\}$ - індикаторна функція.

Наведемо альтернативне визначення розглянутих мір ризику [85]. Позначимо через X випадкову величину з функцією щільності розподілу $p(x)$, $\xi \in R$ - скалярна величина. Розглядається функція $f(\xi, x)$, яка для кожного фіксованого ξ є випадковою величиною, що має щільність розподілу $p(x)$. Введемо функцію $\psi(\xi, \gamma)$ - ймовірність того, що $f(\xi, x)$ не перевищить заданий рівень γ :

$$\psi(\xi, \gamma) = \int_{f(\xi, x) \leq \gamma} p(x) dx.$$

Тут $\psi(\xi, \gamma)$ представляє собою функцію розподілу втрат. Тоді $\text{VaR}_\alpha(X)$ і $\text{CVaR}_\alpha(X)$ можуть бути визначені наступним чином:

$$\text{VaR}_\alpha(X) = \min \{ \gamma \in R | \psi(\xi, \gamma) \geq \alpha \}, \quad (2.23)$$

$$\text{CVaR}_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{f(\xi, x) \geq \text{VaR}_\alpha(X)} f(\xi, x) p(x) dx. \quad (2.24)$$

Введемо визначення динамічних мір ризику. Розглядаємо неперервно розподілену випадкову величину $\{X_t\}$ із скінченним середнім, задану на імовірнісному просторі (Ω, F_t, P_t) , де F_t - інформаційна множина, що містить всю доступну на момент часу t інформацію про ряд. Для фіксованого

довірчого рівня α мірами ризику $VaR_{\alpha}^{\tilde{t}}$ і $CVaR_{\alpha}^{\tilde{t}}$ будемо називати, відповідно,

$$VaR_{\alpha}^t(\tilde{t}) = \inf \left\{ x \in R \mid P_t[X_{\tilde{t}} \leq x] \geq \alpha \right\},$$

$$CVaR_{\alpha}^t(\tilde{t}) = E_t[X_{\tilde{t}} \mid X_{\tilde{t}} \geq VaR_{\alpha}^t(\tilde{t})],$$

де $E_t[\cdot]$ - умовне математичне сподівання, визначене на F_t [3], [68].

Через $VaR_{\alpha,k}^t, CVaR_{\alpha,k}^t$ будемо позначати відповідні міри ризику для моменту часу $t+k$, визначені на інформаційній множині F_t :
 $VaR_{\alpha,k}^t = VaR_{\alpha}^t(t+k)$, $CVaR_{\alpha,k}^t = CVaR_{\alpha}^t(t+k)$.

2.3.2. Основні властивості VaR та CVaR. Міра VaR не має властивості субаддитивності і, отже, не є когерентною мірою ризику [75], [76]. CVaR є когерентною мірою. Наведемо деякі властивості CVaR, які можуть бути корисними при її обчисленні [92], [112].

Вважаємо, що випадкова величина X описує втрати фінансового інструменту, \mathfrak{N} , як і раніше, позначає множину всіх ризиків,
 $x^{(\alpha)}(X) = \inf \{ x \in R \mid P(X \leq x) > \alpha \}$.

Тоді:

1. $CVaR_{\alpha}(X)$ є опуклою функцією. Для будь-яких $X, Y \in \mathfrak{N}$ і сталої $\lambda \in [0,1]$: $CVaR_{\alpha}(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda CVaR_{\alpha}(X) + (1-\lambda)CVaR_{\alpha}(Y)$.
2. Для $\alpha \in (0,1)$ і довільного $\varepsilon > 0$ такого, що $\alpha + \varepsilon < 1$:
 $CVaR_{\alpha+\varepsilon}(X) \geq CVaR_{\alpha}(X)$.
3. Для випадкової величини $X \in \mathfrak{N}$, що має неперервну функцію розподілу, довільних $\alpha \in (0,1)$ і $s \in [x_{(\alpha)}, x^{(\alpha)}]$ має місце рівність:

$$CVaR_{\alpha}(X) = \frac{1}{\alpha} [E[X \cdot I\{X \leq s\}] + sp - sP(X \leq s)].$$

Таким чином, міра ризику CVaR має властивості, які розширюють можливості застосування математичного апарату для її дослідження. Так,

наявність у CVaR властивості опуклості дозволяє застосовувати для її дослідження методи оптимізації. Більш докладно властивості CVaR можна знайти, наприклад, в роботах [76], [78], [85], [86], [112].

2.3.3. Методи оцінювання VaR та CVaR для статичних ризиків.

Розглянемо основні методи, що застосовують для знаходження оцінок мір ризиків VaR і CVaR для статичних ризиків [92], [101], [102].

2.3.3.1. Методи, що використовують повну функцію розподілу.

Нехай X - випадкова величина, X_1, X_2, \dots, X_n - вибірка її значень, $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ - відповідний варіаційний ряд. Будемо вважати, що функція розподілу X може бути визначена в аналітичному або емпіричному вигляді. Тоді для обчислення VaR і CVaR можна скористатися визначеннями (2.20) і (2.22) відповідно.

Оцінювання мір ризику з використанням емпіричної функції розподілу. До цієї групи методів належить, перш за все, метод історичного моделювання - HS (Historical Simulated) [92]. За методом HS, використовуючи історичні дані, будується емпірична функція розподілу. Тоді:

$$\widehat{\text{VaR}}_{\alpha} = X_{([n\alpha])}, \quad (2.25)$$

$$\widehat{\text{CVaR}}_{\alpha} = \left(\sum_{i=[n\alpha]}^n X_{(i)} \right) / (n - [n\alpha]). \quad (2.26)$$

Оцінка (2.26) може бути модифікована. Так у роботі [95]:

$$\widehat{\text{CVaR}}_{\alpha} = \frac{1}{1 + [n\alpha]} \sum_{i=1}^n X_i I\{X_i \geq X_{([n\alpha]+1)}\};$$

у роботі [113] (для випадкової величини, яка описує дохідність портфеля):

$$\widehat{\text{CVaR}}_{\alpha} = - \left(\frac{1}{[n(1-\alpha)]} \sum_{i=1}^{[n(1-\alpha)]} Y_{(i)} + \left(1 - \frac{[n(1-\alpha)]}{n(1-\alpha)} \right) Y_{([n(1-\alpha)]+1)} \right);$$

у роботі [90] (для випадкової величини, яка описує дохідність портфеля):

$$\widehat{\text{CVaR}}_\alpha = \begin{cases} -\bar{Y}_{n(1-\alpha):n}, & n(1-\alpha) \in Z, \\ -\alpha \bar{Y}_{n(1-\alpha):n} - (1-\alpha) \bar{Y}_{n(1-\alpha)+1:n}, & n(1-\alpha) \notin Z \end{cases},$$

де $\bar{Y}_{k:n} = \frac{1}{k} (Y_{(1)} + \dots + Y_{(k)}), k = \overline{1, n}$.

До переваг методу HS відноситься простота в реалізації. Крім того, метод не вимагає апріорних припущень про вид функції розподілу випадкової величини. Метод дуже популярний серед економістів і реалізований в більшості стандартних пакетів для обчислення мір ризику, таких як Matlab, PSG. Однак, використання емпіричного розподілу передбачає стабільність статистичних характеристик випадкової величини. Для подолання цієї проблеми, для аналізу беруться вибірки великого обсягу. Так Bank of International Settlements рекомендує використовувати вибірки, що складаються з не менш ніж 250 даних [114].

Розглянемо дискретний метод Рокфеллера-Урясьєва [91], який також базується на емпіричному розподілі. Нехай для випадкової величини отримано варіаційний ряд $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ з відповідними емпіричними ймовірностями $p_k > 0$. Позначимо через k_α єдиний індекс такий, що

$\sum_{k=1}^{k_\alpha} p_k \geq \alpha > \sum_{k=1}^{k_\alpha-1} p_k$. Тоді мають місце оцінки:

$$\widehat{\text{VaR}}_\alpha = X_{(k_\alpha)}, \quad \widehat{\text{CVaR}}_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \left[\left(\sum_{k=1}^{k_\alpha} p_k - \alpha \right) X_{(k_\alpha)} + \sum_{k=k_\alpha+1}^{k_\alpha} p_k X_{(k)} \right]. \quad (2.27)$$

Оцінювання мір ризику з використанням аналітичного виду функції розподілу. У разі, якщо є підстави вважати, що випадкова величина має певний тип розподілу і знайдені оцінки параметрів цього розподілу, для знаходження VaR і CVaR можна скористатися аналітичними формулами.

У припущенні, що X має нормальний розподіл із середнім μ і дисперсією σ^2 , мають місце формули [2], [68]:

$$\text{VaR}_\alpha = \mu + \sigma \Phi^{-1}(\alpha), \quad \text{CVaR}_\alpha = \mu + \sigma \frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}. \quad (2.28)$$

Тут і далі, $\varphi(\cdot)$, $\Phi(\cdot)$ - щільність і функція стандартного нормального розподілу відповідно.

Функція щільності нормального розподілу є симетричною. У той же час, багато фінансових інструментів демонструють асиметрію розподілу. Як альтернатива нормальному розподілу, в роботі [115] розглянуто асиметричний нормальний розподіл Аззаліні з функцією розподілу:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - 2T\left(\frac{x-\mu}{\sigma}, \lambda\right), \quad \text{де} \quad x \in R, \mu \in R, \sigma > 0, \lambda \in R,$$

$$T(h, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^a \frac{\exp\{-h^2(1+x^2)/2\}}{1+x^2} dx.$$

Для асиметричної нормальної випадкової величини VaR_α визначається як єдиний розв'язок рівняння $F(x) = \alpha$; для $CVaR_\alpha$ має місце формула [116]:

$$CVaR_\alpha = \mu + \frac{\delta\sqrt{2}}{\alpha\sqrt{\pi}} \left[\lambda \Phi(z_\alpha) - \sqrt{2\pi} \varphi(y_\alpha) \cdot \Phi(\lambda y_\alpha) \right],$$

$$\text{де } \delta = \lambda / \sqrt{1+\lambda^2}, \quad y_\alpha = \frac{VaR_\alpha - \mu}{\sigma}, \quad z_\alpha = \sqrt{1+\lambda^2} y_\alpha.$$

Якщо щільність розподілу випадкової величини має вигляд:

$$f(x) = \frac{2}{\sigma} \sum_{i=1}^L \eta_i \phi\left(\frac{x-\mu_i}{\sigma_i}\right) \Phi\left(\lambda_i \frac{x-\mu_i}{\sigma_i}\right), \quad \text{де } \eta_i - \text{вагові коефіцієнти, такі що:}$$

$\eta_i \geq 0, \sum_{i=1}^L \eta_i = 1$, для $CVaR_\alpha$ у роботі [116] отримана формула:

$$CVaR_\alpha = \sum_{i=1}^L \pi_i \left\{ \mu_i + \frac{\sigma_i \sqrt{2}}{\alpha \sqrt{\pi}} \left[\lambda_i \Phi(z_{\alpha,i}) - \sqrt{2\pi} \varphi(y_{\alpha,i}) \Phi(\lambda_i y_{\alpha,i}) \right] \right\},$$

$$\text{де } \sigma_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{1+\lambda_i^2}}, \quad z_{\alpha,i} = \sqrt{1+\lambda_i^2} y_{\alpha,i}, \quad y_{\alpha,i} = \frac{x_{\alpha,i} - \mu_i}{\sigma_i}, \quad x_{\alpha,i} - \text{корінь рівняння}$$

$$\Phi\left(\frac{x-\mu_i}{\sigma_i}\right) - 2T\left(\frac{x-\mu_i}{\sigma_i}, \lambda_i\right) = \alpha, \quad \pi_i = \frac{\eta_i}{\alpha} \left[\Phi\left(\frac{VaR_\alpha - \mu_i}{\sigma_i}\right) - 2T\left(\frac{VaR_\alpha - \mu_i}{\sigma_i}, \lambda_i\right) \right].$$

VaR_α , як і раніше, корінь рівняння $F(x) = \alpha$.

Розглянемо ще один розподіл, що дозволяє отримати аналітичні формули для VaR і CVaR. Розглянемо випадкову величину $\bar{X} = \frac{X - \mu}{\sigma}$. Випадкова величина X має t - local-scaled розподіл з параметрами μ, σ , степенями свободи $\nu > 2$, \bar{X} - стандартний розподіл Стюдента з ν степенями свободи і $E(\bar{X}) = 0, Var(\bar{X}) = \frac{\nu}{\nu - 2}$. Тоді [2]:

$$VaR_{\alpha} = \mu + \sigma t_{\nu}^{-1}(\alpha), CVaR_{\alpha} = \mu + \sigma \frac{g_{\nu}(t_{\nu}^{-1}(\alpha))}{1 - \alpha} \cdot \frac{\nu + (t_{\nu}^{-1}(\alpha))^2}{\nu - 1}, \quad (2.29)$$

де $g_{\nu}(\cdot), t_{\nu}(\cdot)$ - щільність і функція розподілу стандартного розподілу Стюдента відповідно.

Для врахування асиметрії функції щільності розподілу, в роботі [117] розглянуто асиметричний t - розподіл Аззаліні з щільністю розподілу

$$f(x) = 2t_{\nu}(x)g_{\nu+1}\left(\lambda x\sqrt{\frac{\nu+1}{x^2+\nu}}\right), x \in R; \nu > 0. \text{ Нехай } F(x) - \text{відповідна функція}$$

розподілу. Тоді VaR_{α} є розв'язком рівняння $F(x) = \alpha$ і

$$CVaR_{\alpha} = 2 \int_{VaR_{\alpha}}^{+\infty} x t_{\nu}(x) g_{\nu+1}\left(\lambda x\sqrt{\frac{\nu+1}{x^2+\nu}}\right) dx.$$

Більш повний перелік аналітичних формул для VaR і CVaR в залежності від виду функції розподілу випадкової величини можна знайти в [92].

Перевагою розглянутого підходу є наявність аналітичних формул для обчислення. Однак, з'ясування адекватності моделі розподілу емпіричних даних та оцінка і верифікація параметрів функції розподілу може вимагати значних зусиль. У разі, коли є апіорно обґрунтоване припущення про тип розподілу і отримані оцінки параметрів розподілу, для знаходження оцінок VaR і CVaR може бути використаний метод Монте-Карло. Метод Монте-Карло ґрунтується на отриманні великого числа реалізацій випадкової

величини таких, що їх імовірнісні характеристики збігаються з оцінками, отриманими іншими методами. Принциповою відмінністю методу Монте-Карло від методу історичного моделювання є те, що вихідна вибірка є не реальними значеннями випадкової величини, а генерується на підставі деякої моделі. Метод отримання оцінки з використанням методики Монте-Карло - метод Річардсона - описаний в роботі [92] у вигляді наступного алгоритму.

1. У припущенні, що відома функція розподілу випадкової величини з відомими параметрами або їх оцінками, методом Монте-Карло генерується вибірка X_1, \dots, X_N .

2. Використовуючи метод HS, оцінюється \widehat{CVaR}_α^1 .

3. Повторюючи пункти 1 і 2 M раз, знаходяться оцінки $\widehat{CVaR}_\alpha^i, i = \overline{1, M}$ (M - кількість симульованих вибірок).

4. Знаходиться середнє отриманих оцінок: $m_N = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \widehat{CVaR}_\alpha^i$.

5. Покладається $S_n = m_{N_n}, n = \overline{1, k+1}$ для деяких k і N_1, N_2, \dots, N_{k+1} .

6. Оцінка \widehat{CVaR}_α має вигляд: $\widehat{CVaR}_\alpha = \frac{\begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{k+1} \\ 1 & 1/2 & \dots & 1/(k+1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1/2 & \dots & 1/(k+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1/2 & \dots & 1/(k+1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1/2 & \dots & 1/(k+1) \end{vmatrix}}.$

Ядерний метод. Ядерний метод і його модифікації представляють непараметричні методи оцінювання. Перевагою ядерного оцінювання є незалежність методів від будь-якої інформації про джерело даних, типу розподілу. Також методи дозволяють отримати досить прості вирази для оцінок мір ризиків [118].

Нехай $K(\cdot)$ - функція ядра із симетричною функцією щільності розподілу, функція згладжування $G(t) = \int_t^\infty K(u) du$, $G_h(t) = G(t/h)$, де h ширина смуги згладжування. Тоді згладжена оцінка функції розподілу втрат $\overline{F}_X(x) = 1 - S_h(x)$, де $S_h(x) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n G_h(x - X_t)$. Ядерна оцінка $\widehat{\text{VaR}}_\alpha$ є розв'язком рівняння: $S_h(x) = 1 - \alpha$, а оцінка $\widehat{\text{CVaR}}_\alpha$ має вигляд:
$$\widehat{\text{CVaR}}_\alpha = \frac{1}{n(1-\alpha)} \sum_{t=1}^n X_t G_h(\widehat{\text{VaR}}_\alpha - X_t) \quad [95].$$

В роботі [92] наведено усічений ядерний метод оцінювання VaR і CVaR (Trimmed kernel method).

Нехай $X_t^+ = X_t I\{X_t > 0\}$, послідовність $\{k_n\}$ така, що $k_n \rightarrow \infty$ і $\frac{k_n}{n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Оцінка $\widehat{\text{VaR}}_\alpha$ отримана як в попередньому методі. Тоді має місце наступна оцінка для $\widehat{\text{CVaR}}_\alpha$:

$$\widehat{\text{CVaR}}_\alpha = \frac{1}{n(1-\alpha)} \sum_{i=1}^n X_i I\{\widehat{\text{VaR}}_\alpha(X) \leq X_i \leq X_{(k_n)}^+\}.$$

2.3.3.2. Застосування теорії екстремальних значень для оцінювання мір VaR і CVaR для статичних ризиків. Оскільки VaR квантиль (а CVaR-середній квантиль), то для побудови його оцінки достатньо вивчити тільки правий хвіст функції щільності розподілу. Теорія екстремальних значень EVT (Extreme Value Theory) дозволяє аналізувати екстремальні, а, отже, відносно рідкісні події на масиві історичних даних.

Математична постановка задачі теорії екстремальних значень наступна [2], [7], [119], [120]. Нехай X_1, \dots, X_n незалежні, однаково розподілені випадкові величини з функцією розподілу $F(x)$. Є вибірка (X_1, \dots, X_n) і $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Задачею EVT є знаходження функції $G(x)$, такої, що

$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) \rightarrow G(x), n \rightarrow \infty$, де $\{a_n\}, \{b_n\}$ - деякі числові послідовності.

Згідно з теоремою Фішера-Тіппета, такою функцією $H_{\xi, \mu, \sigma}(x)$ є параметрична функція розподілу узагальнених екстремальних значень - GEV (Generalized Extreme Value distribution), що має вигляд:

$$H_{\xi, \mu, \sigma}(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right), & \xi \neq 0 \\ \exp\left(-\exp\left(-\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right), & \xi = 0 \end{cases}.$$

Як частинні випадки, GEV включає три розподіли: при $\xi > 0$ - розподіл Фреше з «товстим» хвостом, при $\xi = 0$ - розподіл Гамбела з «тонким» хвостом, при $\xi < 0$ - розподіл Вейбула. Параметр $\alpha = 1/\xi$ називається хвостовим індексом (при $\xi > 0$).

Одним з популярних методів оцінки параметра $\xi > 0$ є непараметричний метод Хілла [7]. Розглянемо варіаційний ряд втрат $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$. Тоді для цілого $l > 0$ для ξ має місце оцінка

$$\hat{\xi}^{Hill}(l) = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l (\ln X_{(n-j+1)} - \ln X_{(n-l)}). \quad \text{Показано [7], що } \sqrt{k} \left| \hat{\xi}^{Hill}(l) - \xi \right|$$

асимптотично має нормальний розподіл $N(0; \xi^2)$. Для знаходження l на

графіку $\left(k, \hat{\xi}^{Hill}(l)\right)$ вибирається значення l , при якому оцінка $\hat{\xi}^{Hill}(l)$ стає

стійкою. Більш точну оцінку можна отримати із застосуванням процедури

бутстрепа [121]. Знаючи $\hat{\xi}$, можна отримати наступні оцінки [3]:

$$\widehat{VaR}_\alpha = \exp \left(- \left(\frac{l_{n,\alpha}}{n(1-\alpha)} \right)^{\hat{\xi}} X_{(l_{n,\alpha})} \right) - 1,$$

$$\widehat{CVaR}_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \exp \left(- \left(\frac{l_{n,\alpha}}{nq} \right)^{\hat{\xi}} X_{(l_{n,\alpha})} \right) dq - 1,$$

де $l_{n,\alpha} = [n(1,05 - \alpha)]$.

Метод «block maxima». Відповідно до методу «block maxima» [7], вибірка розбивається на m взаємно непересічних підвибірки, на кожній з яких визначається максимальне значення $M_n^{(i)}$, $i = \overline{1, m}$. Вважається, що m є достатньо великим і для послідовності $\{M_n^{(i)}\}$ виконані умови теореми Фішера-Тіппета, тобто функція $H_{\xi, \mu, \sigma}(x)$ є функцією розподілу максимальних значень у вибірці. Для знаходження оцінок параметрів μ, σ, ξ може бути використаний ММП. При відомих параметрах функції $H_{\xi, \mu, \sigma}(x)$ для отримання оцінок мір ризику можна скористатися методом Монте-Карло або використати аналітичні формули. Наприклад, у роботі [122] було запропоновано аналітичні формули для знаходження VaR_α і $CVaR_\alpha$ у вигляді:

$$VaR_\alpha = \mu - \frac{\sigma}{\xi} \left[1 - \{-\ln \alpha\}^{-\xi} \right], \quad (2.30)$$

$$CVaR_\alpha = \frac{1}{\sigma} \int_{VaR_\alpha}^{+\infty} x \left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{-1/\xi - 1} \exp \left\{ - \left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{-1/\xi} \right\} dx. \quad (2.31)$$

Недоліком методу «block maxima» є потенційна нестача екстремальних значень. Більш повну інформацію про екстремальні значення використовує POT метод.

POT– метод. Основна ідея POT (Peaks Over Thresholds) - методу полягає в наступному [7], [120]. Вибирається порогове значення u і розглядаються тільки значення вибірки, що його перевищують: $X_i > u$.

Доведено, що функція розподілу екстремальних значень вище порогового рівня $F_u(y) = P\{X - u \leq y \mid X > u\}, y > 0$ для досить великого u буде асимптотично наближатися до функції [7]:

$$G_{\xi, \beta(u)}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \xi \frac{x-u}{\beta(u)}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{x-u}{\beta(u)}\right), & \xi = 0 \end{cases}, \quad x \in \begin{cases} [u, \infty), & \xi \geq 0 \\ \left[u, u - \frac{\beta(u)}{\xi}\right], & \xi < 0, \beta(u) > 0. \end{cases}$$

Функція $G_{\xi, \beta(u)}(x)$ називається функцією узагальненого розподілу Парето GPD (Generalized Pareto Distribution).

Перевага POT- методу полягає в тому, що він дозволяє отримати явні формули оцінок VaR і CVaR [7]:

$$\widehat{\text{VaR}}_{\alpha} = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left[\left(\frac{n(1-\alpha)}{k} \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right], \quad \widehat{\text{CVaR}}_{\alpha} = \frac{1}{1-\hat{\xi}} \widehat{\text{VaR}}_{\alpha} + \frac{\hat{\beta} - \hat{\xi}u}{1-\hat{\xi}}. \quad (2.32)$$

У роботі [123] розглянуто POT-метод з використанням емпіричної функції розподілу – емпіричний POT-метод. Суть методу полягає в наступному: порогове значення відображається горизонтальною лінією на графіку даних, з'єднаних послідовно. Між двома крайніми точками перетину пороговою лінією графіка значень вибирається одне максимальне значення, сукупність яких утворює екстремальну вибірку $\{X_i, i = \overline{1, N}\}$. Для аналізу отриманої вибірки розглянутий інтервал розбивається на m однакових по довжині проміжків так, щоб на кожному проміжку був хоча б один пік. Тоді $n = \frac{N}{m}$ - середнє число піків на одному проміжку. Тобто, можна розглядати n незалежних, однаково розподілених випадкових величин, для яких є N реалізацій. Тоді функція розподілу всіх піків вище u має вигляд:

$$\overline{F}_{\xi}(x) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x) = [F_{pot}(x)]^n. \quad (2.33)$$

Функцію $F_{pot}(x)$ можна побудувати як емпіричну. За отриманою формулою розподілу знайти VaR і CVaR.

2.3.3.3. Квантильне оцінювання. Одним з класичних непараметричних методів оцінювання VaR і CVaR є метод емпіричних квантилів [2].

Як і раніше, позначимо через $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ варіаційний ряд, побудований по вибірці випадкової величини X , функції $f(x)$ і $F(x)$ - щільність та функція розподілу відповідно. Метод квантильного оцінювання базується на наступному теоретичному результаті. Якщо $x_{(\alpha)}$ - α - квантиль для $F(x)$ і $f(x_{(\alpha)}) \neq 0$, то

$$X_{(l)} \sim N \left\{ x_{(\alpha)}, \frac{\alpha(1-\alpha)}{n[f(x_{(\alpha)})]^2} \right\}, l \rightarrow \infty, \quad (2.34)$$

де $l = n\alpha$. Враховуючи (2.20), оцінку \widehat{VaR}_α можна отримати з (2.34), використовуючи $X_{(l)}$.

У випадку, коли $l = n\alpha$ не ціле, для отримання квантильної оцінки використовується інтерполяція. Нехай l_1, l_2 - додатні, найближчі до $n\alpha$ цілі значення такі, що $l_1 < n\alpha < l_2$. Позначимо $p_i = \frac{l_i}{n}$, $i = 1, 2$. Тоді для оцінок мір ризику маємо:

$$\widehat{VaR}_\alpha = \frac{p_2 - \alpha}{p_2 - p_1} X_{(l_1)} + \frac{\alpha - p_1}{p_2 - p_1} X_{(l_2)}, \quad \widehat{CVaR}_\alpha = \frac{1}{N_\alpha} \sum_{i=1}^n X_{(i)} I \{ X_{(i)} > \widehat{VaR}_\alpha \},$$

де N_α - число членів варіаційного ряду, що перевищують \widehat{VaR}_α .

У разі, якщо значення варіаційного ряду не рівномірні, оцінки мір ризику можуть бути отримані в наступному вигляді. Розглядаємо варіаційний

ряд: $\{X_{(1)}, P_{(1)}\}, \dots, \{X_{(n)}, P_{(n)}\}$, $\sum_{i=1}^n P_{(i)} = 1$. Позначимо: $p = 1 + (\alpha - 1) \frac{n}{N}$,

$\bar{p}^- = \sum_{i=1}^{k^-} P_{(i)} \leq p$, $\bar{p}^+ = \sum_{i=1}^{k^-+1} P_{(i)} \geq p$. Тоді:

$$\widehat{VaR}_\alpha = X_{(k^-)} + \frac{X_{(k^-+1)} - X_{(k^-)}}{\bar{p}^+ - \bar{p}^-} (p - \bar{p}^-),$$

$$\widehat{CVaR}_\alpha = \widehat{VaR}_\alpha \cdot \frac{\bar{p}^+ - \bar{p}^-}{\bar{p}^+ - \bar{p}^-} + \frac{1}{n - k^- - 1} \sum_{i=1}^{n-k-1} X_{(k^-+i)} P_{(k^-+i)}.$$

Метод емпіричного квантиля простий і не передбачає завдання функції розподілу. Однак, він має істотні недоліки: передбачає стабільність статистичних характеристик в рамках вибірки; якщо α є досить близьким до 1, емпіричний квантиль не є адекватною оцінкою теоретичного квантиля.

2.3.3.4. Оптимізаційний метод Рокфеллера - Урясьєва.

Скориставшись означенням VaR_α і $CVaR_\alpha$ у вигляді (2.23) і (2.24) відповідно, можна сформулювати алгоритм знаходження цих мір ризику у вигляді оптимізаційної задачі [87].

Визначимо функцію:

$$F_\alpha(\xi, \beta) = \beta + \frac{1}{1 - \alpha} \int_{x \in R} [f(\xi, x) - \beta]^+ p(x) dx, \quad (2.35)$$

де $p(x)$ - щільність розподілу випадкової величини, $[t]^+ = \begin{cases} t, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$.

В роботі показано, що $F_\alpha(\xi, \beta)$ є опуклою і неперервно диференційовною по β функцією. В цьому випадку:

$$VaR_\alpha \in \arg \min_{\beta \in R} F_\alpha(\xi, \beta), \quad CVaR_\alpha = \min_{\beta \in R} F_\alpha(\xi, \beta),$$

$(VaR_\alpha(X))$ є лівою крайньою точкою множини розв'язків $\arg \min_{\beta \in R} F_\alpha(\xi, \beta)$.

Тип задачі визначає метод наближеного (або точного) обчислення інтеграла в (2.35). Наприклад, в разі дискретної вибірки $\{X_i, i = \overline{1, n}\}$, метод прямокутників призведе до формули $F_\alpha(x, \beta) = \beta + \frac{1}{n(1-\alpha)} \sum_{k=1}^n [f(\xi, x_k) - \beta]^+$.

Для вирішення описаних оптимізаційних задач, можуть бути використані стандартні оптимізаційні пакети. На жаль, широко відомі пакети Matlab і Mathematica містять дуже обмежені модулі, що дозволяють ефективно вирішувати тільки лінійні задачі. Пакети вищого рівня (наприклад PSG) є виключно комерційними.

2.3.4. Методи оцінювання мір ризику VaR та CVaR для часового ряду. У цьому підрозділі дисертаційної роботи проаналізовано найбільш популярні методи оцінювання мір динамічних ризиків VaR і CVaR, наведено їх опис, проведено порівняльний аналіз, наведені рекомендації по використанню [103]-[105].

2.3.4.1. Оцінювання VaR та CVaR на основі стохастичної моделі часового ряду.

Модель “випадкового блукання” (“RandomWalk”) [3]. Кажуть, що часовий ряд $\{X_t\}$ підкоряється моделі процесу “випадкового блукання” якщо

$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$, де $\{\varepsilon_t\} \stackrel{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ (незалежні, однаково розподілені по нормальному закону випадкові величини). Очевидно, справедливі оцінки:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i, \quad \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \hat{\mu})^2}.$$

Для моделі “випадкового блукання”

справедливо правило масштабування для періода k (“правило квадратного кореня”). Якщо $X_t^k = X_{t-1}^k + \varepsilon_t^k$, $\varepsilon_t^k \sim k\mu + \sqrt{k}(\varepsilon_t - \mu)$, то $\hat{\mu}^k = k\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}^k = \sqrt{k}\hat{\sigma}$, і для заданого довірчого рівня α оцінки мір ризику:

$$\widehat{VaR}_{\alpha,k}^t = \hat{\mu}^k + \hat{\sigma}^k x_{(\alpha)}, \quad \widehat{CVaR}_{\alpha,k}^t = \hat{\mu}^k + \frac{(\hat{\sigma}^k)^2}{2} \frac{\Phi(x_{(\alpha)} - \hat{\sigma}^k)}{1-\alpha}, \quad (2.36)$$

$\Phi(\cdot)$ - функція розподілу стандартної нормальної випадкової величини, $x_{(\alpha)}$ - її α - квантиль.

Перевагою моделі випадкового блукання є її простота і наявність готових формул для оцінок мір ризику. Крім того, це найвідоміша модель нестационарного часового ряду (нестационарність визначається тим, що 1 є коренем характеристичного рівняння). До недоліків моделі відноситься те, що її залишки вважаються нормально розподіленими, що є істотним обмеженням при моделюванні реальних фінансових часових рядів. Оскільки при збільшенні основного періоду дискретизації розподіл залишків наближається до нормального, модель випадкового блукання використовується для моделювання фінансових інструментів з великим (близько року) періодом звітності [2].

Авторегресійні моделі для оцінок мір ризику. Вважаємо часовий ряд стаціонарним в широкому сенсі. Розглянемо модель авторегресії q -го порядку $AR(q)$, розглянуту докладно в 2.1.2. Вважаємо, що коефіцієнти авторегресії задовольняють умові стаціонарності $\left| \sum_{i=1}^q a_i \right| < 1$. У разі, якщо залишки моделі мають нормальний розподіл: $\{v_t\} \stackrel{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, в роботі [3] запропоновано явні формули для оцінок VaR і CVaR.

Введемо в розгляд часовий ряд $\{\bar{X}_t\}$, де $\bar{X}_t = X_t - \mu t$, $\mu = \frac{\mu_1}{1 - \sum_{i=1}^q a_i}$. Тоді для

$\{\bar{X}_t\}$ модель $AR(q)$ може бути записана у вигляді: $\bar{X}_t = \sum_{i=1}^q a_i \bar{X}_{t-i} + \bar{v}_t$,

$\{\bar{v}_t\} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$. Позначивши через $\hat{q}, \hat{a}_i, \hat{\sigma}$ - оцінки відповідних параметрів, знайдені за ММП, для оцінок мір ризику використовуються формули (2.36), де:

$$\hat{\mu}^k = k\hat{\mu} + \hat{m}, \hat{\sigma}^k = \hat{\sigma} \sqrt{\sum_{j=0}^{k-1} \delta_j^2}, \quad \hat{\mu} = \frac{X_n - X_0}{n}, \quad \hat{m} = \tilde{X}_{t+k} - \tilde{X}_t, \quad \delta_0 = 1,$$

$\delta_j = \sum_{i=1}^j \hat{a}_i I\{i=j\}$ ($I\{\cdot\}$ -індикаторна функція), $\hat{a}_i = 0$ для $i > \hat{q}$. Послідовність

$\{\tilde{X}_{t+k}\}$ знаходиться рекурсивно: $\tilde{X}_{t+j} = \sum_{i=1}^{\hat{q}} \hat{a}_i \tilde{X}_{t+j-i}$, $j = \overline{1, k}$, $\tilde{X}_u = \bar{X}_u$ для $u \leq t$.

Моделі зі змінною волатильністю для оцінювання мір ризику. (Variance-Based VaR Models) Припустимо, що часовий ряд $\{X_t, t \in Z\}$ підпорядковується стохастичному процесу виду:

$$X_t = \mu_t + \varepsilon_t = \mu_t + \sigma_t Z_t, \quad (2.37)$$

де μ_t і σ_t^2 умовні середнє і дисперсія, визначені на інформаційній множині F_t , $\{Z_t\}$, незалежні, однаково розподілені випадкові величини з середнім 0 і дисперсією 1. Позначимо через Z випадкову величину, що має такий же розподіл, що і будь-яка випадкова величина з $\{Z_t\}$. Тоді [2], [68]:

$$VaR_{\alpha,k}^t = \mu_{t+k} + F^{-1}(\alpha) \sigma_{t+k} = \mu_{t+k} + VaR_{\alpha}(Z) \sigma_{t+k}, \quad (2.38)$$

$$CVaR_{\alpha,k}^t = \mu_{t+k} + CVaR_{\alpha}(Z) \sigma_{t+k}. \quad (2.39)$$

Таким чином, для оцінювання $VaR_{\alpha,k}^t$, $CVaR_{\alpha,k}^t$ потрібно оцінити μ_{t+k}, σ_{t+k} і отримати оцінки мір ризику $VaR_{\alpha}(Z)$ і $CVaR_{\alpha}(Z)$ для однієї випадкової величини. Методи оцінювання $VaR_{\alpha}(Z)$ і $CVaR_{\alpha}(Z)$ детально описані в 2.3.3. Для оцінювання умовної дисперсії найбільшу популярність мають моделі класу GARCH, описані в 2.1.3.

У деяких випадках застосування розглянутого підходу дозволяє отримати явні формули для оцінки $VaR_{\alpha,k}^t$ і $CVaR_{\alpha,k}^t$. Так у роботі [3] досліджена модель $GARCH(1,1)$:

$$X_t = \mu + \varepsilon_t = \mu + \sigma_t Z_t, \quad (2.40)$$

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + b_1 \sigma_{t-1}^2, \quad (2.41)$$

$\{Z_t\}$ мають t -розподіл з ν степенями свободи. Умови стаціонарності $0 < a_0 < \infty, a_1 \geq 0, b_1 \geq 0$, вважаються виконаними. Тоді мають місце оцінки:

$$\widehat{VaR}_{\alpha,k}^t = \hat{\mu}^k + \hat{\sigma}^k x_{\nu^k}^{(\alpha)}, \quad \widehat{CVaR}_{\alpha,k}^t = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha (\hat{\mu}^k + \hat{\sigma}^k x_{\nu^k}^{(q)}) dq,$$

де $x_{\nu^k}^{(\alpha)}$ - α -квантиль t -розподілу з ν степенями свободи, оцінки $\hat{\mu}, \hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{b}_1$ отримані за ММП, $\hat{\mu}^k = k\hat{\mu}$. Для знаходження оцінки $\hat{\sigma}^k = \hat{\sigma}(t, t)$ використовувався наступний алгоритм:

$$\hat{\sigma}^2(t^*, t) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1(\varepsilon_{t^*}^k - \hat{\mu}^k)^2 + \hat{b}_1 \hat{\sigma}^2(t^* - k, t), \quad \hat{\sigma}^2(t - nk, t) = \frac{k}{nk - 1} \sum_{i=0}^{nk-1} (X_{t-i} - \hat{\mu})^2,$$

$t^* = t - (n-1)k, \dots, t - k, t$. Правило знаходження $\hat{\nu}^k$ наведено в [3].

Розглянута модель добре відображає гетероскедастичну поведінку фінансових рядів. Наведені оцінки найчастіше використовуються для знаходження мір ризику на термін 1 день і 10 днів. На період більше 15 днів наведені формули дають завищений результат. На період більше 30 днів порушуються умови стаціонарності [3].

Однією з найпростіших і розповсюджених моделей є модель Riskmetrics - RM-модель [92], [124]. Розглядається модель виду:

$$X_t = \sigma_t Z_t, \quad \sigma_t^2 = (1 - \lambda) \sum_{j=1}^{t-1} \lambda^{j-1} X_{t-j}^2, \quad \lambda \in (0, 1), \quad (2.42)$$

$\{Z_t\} \stackrel{iid}{\sim} N(0, 1)$. Для достатньо великих t (2.42) добре апроксимується моделлю виду $IGARCH(1, 1)$: $\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) X_{t-1}^2$. Для оцінок мір ризику мають місце формули:

$$\widehat{VaR}_{\alpha,k}^t = \sqrt{k} \Phi^{-1}(\alpha) \sigma_t, \quad \widehat{CVaR}_{\alpha,k}^t = \frac{\sqrt{k}}{\alpha} \phi(\Phi^{-1}(\alpha)) \sigma_t.$$

Популярність використання моделей $GARCH(1, 1)$ і RM обумовлена наявністю простих і зрозумілих економістам формул для оцінки мір ризику. Навіть в тому випадку, коли часовий ряд не цілком адекватно описується цими моделями, використання аналітичних формул дозволяє з достатньою

достовірністю оцінити тенденції зміни ризиків. У роботі [125] проведено порівняльний аналіз моделей $GARCH(1,1)$ і RM. Апробація моделей на 31 фондовій біржі країн G7 і Азії дозволила зробити наступні практичні рекомендації. RM - модель слід використовувати для оцінок мір ризику для невеликих ринків, що розвиваються і для досить великого довірчого рівня ($\alpha > 0,95$). Модель $GARCH(1,1)$ добре зарекомендувала себе у роботі з великими розвиненими ринками.

2.3.4.2. Регресійні методи оцінювання VaR та CVaR. Метод квантильної регресії - непараметричний метод моделювання VaR та CVaR. Метод не вимагає будь-яких припущень про вид функції розподілу, однак припускає, що розподіл залишається незмінним протягом певного проміжку часу. З визначення VaR випливає, що ця величина - квантиль функції розподілу. На відміну від попередніх методів, що моделюють функцію розподілу, метод квантильної регресії передбачає моделювання умовного квантиля. Для моделювання квантиля використовується два типи моделей - регресійні і авторегресійні.

Квантильна регресія. Розглядається оцінка мір ризику для одиничного часового періоду. Як випливає з визначення, для оцінки VaR_{α}^t треба оцінити α -квантиль - $x_{(\alpha)}$ умовного розподілу для $X_t: x_{(\alpha)}|F_{t-1}$. Рівняння лінійної регресії має вигляд [126]: $X_t = \bar{Z}_t^T \bar{\beta}$, де \bar{Z}_t - вектор регресорів з F_{t-1} , $\bar{\beta}$ - вектор параметрів. Тоді оцінка умовного квантиля має вигляд:

$$\hat{x}_{(\alpha)}|F_{t-1} \equiv \inf\{\bar{Z}_t^T \bar{\beta} | \bar{\beta} = \arg \min \Phi(\bar{\beta})\},$$

де $\Phi(\bar{\beta}) = \sum_{t=1}^n \lambda^{n-t} (X_t - \bar{Z}_t^T \bar{\beta})(\alpha - I[X_t < \bar{Z}_t^T \bar{\beta}])$, λ - ваговий коефіцієнт. Для вирішення оптимізаційної задачі використовуються методи лінійного програмування.

В роботі [126] запропоновано кілька оцінок CVaR. Наведемо дві з них:

$$\widehat{CVaR}_\alpha^t = \frac{1}{\alpha n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{Z}_t^T \bar{\beta}_0)(\alpha - I[X_i < \bar{Z}_t^T \bar{\beta}_0]),$$

$$\widehat{CVaR}_\alpha^t = \frac{1}{\alpha \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i}} \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} (X_i - \bar{Z}_t^T \bar{\beta}_0)(\alpha - I[X_i < \bar{Z}_t^T \bar{\beta}_0]).$$

Авторегресійні VaR - моделі (CaViaR - моделі). У роботі [127] запропоновано моделювати умовні квантилі з використанням авторегресійних моделей за аналогією з GARCH – моделями. Найбільшу популярність мають наступні дві моделі:

$VaR_\alpha^t = \beta_0 + \beta_1 VaR_\alpha^{t-1} + \beta_2 |X_{t-1}|$ - симетрична модель абсолютного значення (Symmetric Absolute Value),

$VaR_\alpha^t = \beta_0 + \beta_1 VaR_\alpha^{t-1} + \beta_2 |X_{t-1}| + \beta_3 |X_{t-1}| I[X_{t-1} < 0]$ - асиметрична модель (Asymmeytic Slope CaViaR).

Параметри моделей β_i оцінюються методами розглянутої вище квантільної регресії.

2.3.5. Методи визначення якості оцінок мір ризику VaR та CVaR.

Після того як модель для оцінки мір ризику побудована, важливо перевірити її надійність і точність. Для дослідження застосовується процедура бектестінгу (back-testing). Модель бектестінгу включає в себе порівняння обчисленого за історичними даними VaR і CVaR з реальною дохідністю.

2.3.5.1. Тести для визначення якості оцінок мір ризику VaR.

Розглянемо тести, що використовуються для аналізу якості отриманих оцінок мір ризику VaR.

Безумовний тест Купеця (Kupiec test) або POF-тест (proportion of failures test) [128]. Нехай є вибірка довжиною T , N - число випадків, коли втрати перевищують оцінку VaR_α^t . Тоді випадкова величина N має біноміальний розподіл $N \sim B(T, \alpha)$, де $1 - \alpha = P[X_t > VaR_\alpha^t]$. Гіпотеза

$H_0: \frac{N}{T} = 1 - \alpha$. Гіпотеза $H_1: \frac{N}{T} \neq 1 - \alpha$. Відповідно до ММП розглядається статистика:

$$LR_{POF} = 2 \ln \left[\left(1 - \frac{N}{T} \right)^N \left(\frac{N}{T} \right)^{T-N} \right] - 2 \ln \left[(1 - \alpha)^N \alpha^{T-N} \right]. \quad (2.43)$$

LR_{POF} асимптотично наближається до розподілу χ^2 з одним ступенем свободи при виконанні гіпотези H_0 , що α є дійсне значення ймовірності. Тест може бути використаний як для перевірки статичного значення VaR, так і з достатньою достовірністю для перевірки $VaR_\alpha^t | F_{t-1}$.

Тест на незалежність Крістофферсена (Christoffersen test) [129]. Цей тест перевіряє гіпотезу H_0 : чи є події $X_t > VaR_\alpha^t$ і $X_{t+1} > VaR_\alpha^{t+1}$ незалежними. Тест ґрунтується на дискретному ланцюзі Маркова з матрицею перехідних ймовірностей: $\Pi = \begin{bmatrix} \pi_{00} & \pi_{01} \\ \pi_{10} & \pi_{11} \end{bmatrix}$, де π_{ij} , $i, j \in \{0, 1\}$ - ймовірність того, що $I_{t+1} = j | I_t = i$. Наприклад, π_{01} - ймовірність того, що $X_{t+1} > VaR_\alpha^{t+1} | X_t < VaR_\alpha^t$. Застосовується ММП з тестовою статистикою:

$$LR_{ind} = -2 \ln \left[(1 - \alpha)^{T-N} (\alpha)^N \right] + 2 \ln \left[(1 - \pi_{01})^{n_{00}} \pi_{01}^{n_{01}} (1 - \pi_{11})^{n_{10}} \pi_{11}^{n_{11}} \right], \quad (2.44)$$

де $\pi_{ij} = \frac{n_{ij}}{\sum_j n_{ij}}$, n_{ij} - кількість подій $X_{t+j} > VaR_\alpha^t | X_{t+i} > VaR_\alpha^{t+1}$. У випадку

виконання гіпотези H_0 статистика LR_{ind} асимптотично має розподіл χ^2 з одним ступенем свободи.

Комбінація тестів передбачає використання статистики:

$$LR_{cc} = LR_{ind} + LR_{POF}, \quad (2.45)$$

яка має розподіл χ^2 з двома ступенями свободи. Таким чином, тест Крістофферсена застосовується для перевірки передбачуваної здатності і точності VaR - моделі.

2.3.5.2. Тести для визначення якості оцінок мір ризику CVaR.

Розглянемо тести для аналізу оцінок CVaR.

V - тест [3]. Застосовується процедура бектестінгу. Нехай \hat{e} є спрогнозовані оцінки CVaR для T минулих днів і e реальні дані. Знаходиться статистика:

$$V_1 = \frac{\sum_{t=1}^T (X_{t+1} - \widehat{CVaR}_\alpha^t(X_{t+1})) I\{X_{t+1} > \widehat{VaR}_\alpha^t\}}{\sum_{t=1}^T I\{X_{t+1} > \widehat{VaR}_\alpha^t\}}. \quad (2.46)$$

Якщо $V_1 = 0$, то модель коректна. Отже, чим менше V_1 , тим краще модель.

Недолік цього тесту - залежність від оцінки \widehat{VaR}_α^t , яка може бути поганою.

Ще одна оцінка, запропонована в [3], має вигляд:

$$V_2 = \frac{\sum_{t=1}^T (X_{t+1} - \widehat{CVaR}_\alpha^t(X_{t+1})) I\{D_t > D_\alpha\}}{\sum_{t=1}^T I\{D_t > D_\alpha\}}, \quad (2.47)$$

де $D_t = X_{t+1} - \widehat{CVaR}_\alpha^t(X_{t+1})$, D_α - емпіричний α -квантиль для $\{D_t, t = \overline{1, T}\}$.

Аналогічно, для адекватної моделі $V_2 \rightarrow 0$.

Об'єднанням цих двох оцінок є оцінка:

$$V = \frac{|V_1| + |V_2|}{2}. \quad (2.48)$$

Чим краще модель, тим ближче V до 0.

Аналіз оцінки CVaR для може бути отриманий за допомогою бутстреп-тесту [130], [131]. Бутстреп-тест полягає в застосуванні бутстреп-процедури до бектестінгу.

В тесті визначається різниця між значеннями X_{t+1} і $CVaR_\alpha^t(X_{t+1}) | X_{t+i} > VaR_\alpha^t(X_{t+1})$. Вважається, що використовується модель (2.37) при умові, що розподіл $\{Z_t\}$ належить сімейству local - scaled розподілів. Визначається похибка:

$$R_{t+1} = \frac{X_{t+1} - CVaR_{\alpha}^t(X_{t+1})}{\sigma_{t+1}} = Z_{t+1} - E_t[Z | Z > VaR_{\alpha}(Z)]. \quad (2.49)$$

Розглядається r_{t+1} -похибка (2.49) для значень, що перевищують $\widehat{VaR}_{\alpha}^t(X_{t+1})$, позначених як x_{t+1} ($x_{t+1} > \widehat{VaR}_{\alpha}^t(X_{t+1})$): $r_{t+1} = \frac{x_{t+1} - CVaR_{\alpha}^t(X_{t+1})}{\hat{\sigma}_{t+1}}$. Потужність $\bar{r} = \{r_{t+1} | x_{t+1} > \widehat{VaR}_{\alpha}^t(X_{t+1})\}$ дорівнює m .

Гіпотеза $H_0: \mu_{t+1}, \sigma_{t+1}, CVaR_{\alpha}^t(X_{t+1})$ оцінені коректно. В цьому випадку випадкова величина, що відповідає r_{t+1} , повинна бути *iid* з нульовим середнім $\mu_0 = 0$. В іншому випадку - оцінка $CVaR_{\alpha}^t(X_{t+1})$ систематично занижена.

Для перевірки гіпотези H_0 застосовується процедура непараметричного бутстрепа, заснована на статистиці: $T = \frac{\bar{r} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{m}}$, де

$$\bar{r} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m r_i, \quad \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (r_i - \bar{r})^2}. \quad \text{Зміщені відносні похибки } \tilde{r}_i = r_i - \bar{r} + \mu_0,$$

$i = \overline{1, m}$ реалізуються відповідно до бутстреп-метода у вигляді реалізацій \tilde{r}_i^* ,

$i = \overline{1, m}$, за якими будується статистика $T_j^* = \frac{\bar{\tilde{r}}^* - \mu_0}{\tilde{\sigma} / \sqrt{m}}$, $j = \overline{1, M}$. Тоді оцінка

$$\text{ймовірності гіпотези } H_0: P_{H_0} = \frac{1 + \sum_{j=1}^M I\{T_j^* > T\}}{1 + M}. \quad \text{Чим ближче } P_{H_0} \text{ до } 1, \text{ тим}$$

ближче гіпотеза H_0 до істини.

2.3.5.3 Статистики РоЕ і bРоЕ. Для аналізу якості отриманих прогнозних оцінок мір ризику можуть бути розглянуті статистики РоЕ (Probability of Exceedance) і bРоЕ (buffered Probability of Exceedance) [132].

Нехай X неперервна випадкова величина. Якщо розглядати $VaR_\alpha(X)$ і $CVaR_\alpha(X)$ як функції α , то PoE і bPoE визначаються, відповідно, формулами: $PoE(\alpha) = 1 - VaR_\alpha^{-1}(X)$, $bPoE(\alpha) = 1 - CVaR_\alpha^{-1}(X)$.

У роботі [133] сформульовано метод знаходження bPoE у вигляді розв'язку оптимізаційної задачі. Позначимо через $W(V)$ деяку порогову функцію від $V = CVaR_\alpha(X)$, $[X - W(V)]^+ = \max(0, X - W(V))$. Тоді:

$$bPoE = \begin{cases} 0, & V > \sup X \\ \min_{W < V} \frac{E[X - W]^+}{V - W}, & E[X] < V < \sup X \\ 1, & \text{в інших випадках} \end{cases} \quad (2.50)$$

Мінімальне значення $W(V)$ в (2.50) дорівнює $VaR_{1-bPoE}(X)$ і задовольняє рівняння $V = E[X | X > W(V)]$.

Висновки до розділу 2

У другому розділі дисертації приведено опис математичних моделей часових рядів, що використовуються для їх моделювання і прогнозування. З огляду на те, що для фінансових часових рядів характерна наявність волатильності, особлива увага надана моделям умовної гетероскедастичності.

Враховуючи характерну для фінансових рядів властивість сильної залежності, в данному розділі наведено основні означення сильної залежності часових рядів та приведено математичний апарат методів, що використовуються при оцінці параметра сильної залежності – параметра Херста. Проаналізовано вісім стандартних методів для оцінювання параметра Херста.

Однією із важливих похідних задач моделювання часових рядів є оцінювання мір ризику VaR і CVaR. В розділі наведено основні означення цих мір ризику, вказано їх властивості, дається опис найбільш популярних сучасних методів оцінювання мір статичних і динамічних ризиків, які представлені в літературі, надано рекомендації по їх застосуванню,

проаналізовано переваги і недоліки. Розділ містить також статистичні тести, які використовуються при аналізі результатів моделювання і прогнозування часових рядів і оцінок мір ризиків VaR і CVaR.

РОЗДІЛ 3

СИСТЕМНИЙ ПІДХІД ДО ПОБУДОВИ ПРОГНОЗНИХ ОЦІНОК МІР ДИНАМІЧНИХ РИЗИКІВ VaR I CVaR ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ МЕТОДУ ЗГЛАДЖУВАННЯ АВТОКОРЕЛЯЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ

У даному розділі пропонується розроблений у роботі системний підхід до прогнозування мір динамічних ризиків VaR та CVaR. Системний підхід складається з двох етапів, і його структурна схема представлена на рис. 3.1.

3.1. Вибір методу прогнозування мір динамічних ризиків VaR та CVaR (I етап).

На першому етапі проводиться загальний статистичний аналіз ряду даних і його квадратів з використанням тестів, розглянутих в 2.1.5. Ряд квадратів досліджується на наявність властивості сильної залежності з використанням класичних методів, описаних в 2.2.2. Здійснюється аналіз стандартних методів оцінювання мір динамічних ризиків, описаних в 2.3.4, і вибір методу, що найкраще відповідає вхідним даним. Проведений аналіз існуючих методів отримання оцінок мір динамічних ризиків дозволяє виділити два основні підходи оцінювання, представлені в сучасній літературі. Перший підхід ґрунтується на побудові стохастичної моделі часового ряду і розглянутий в 2.3.4.1. Особливу популярність мають моделі часових рядів зі змінною волатильністю. У цьому випадку задача оцінювання мір динамічних ризиків зводиться до оцінювання дисперсії та отримання оцінок мір статичних ризиків для залишків моделі. У деяких випадках підхід дозволяє отримати явні формули для оцінок мір динамічних ризиків. Даний підхід є найбільш популярним, оскільки дозволяє вибирати методи моделювання дисперсії ряду і оцінювання мір статичних ризиків в залежності від особливостей даних і кінцевих цілей моделювання.

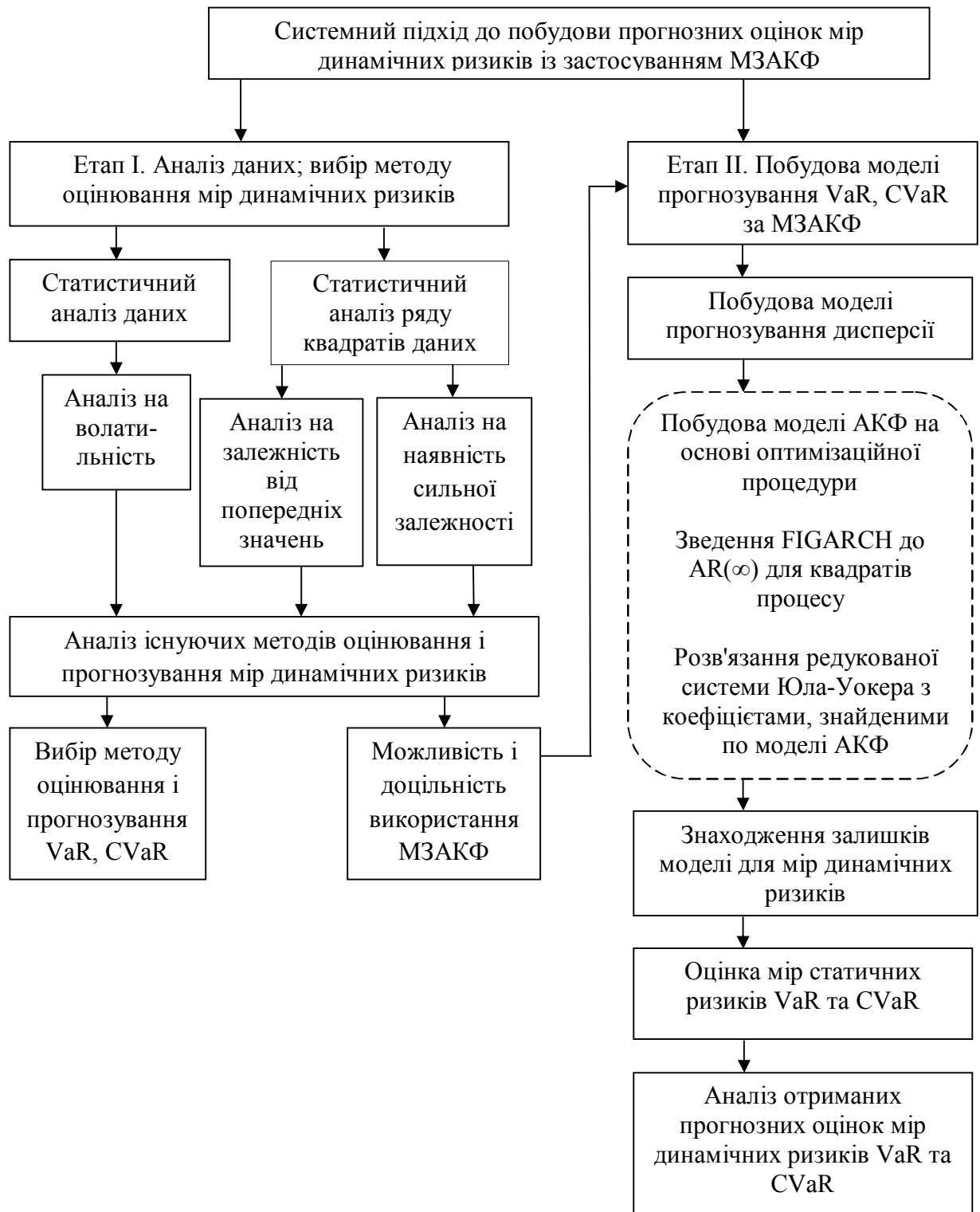


Рис. 3.1. Структурна схема системного підходу до побудови прогнозних оцінок мір динамічних ризиків із застосуванням методу згладжування АКФ (МЗАКФ)

Другий підхід - використання регресійних моделей, описаних в 2.3.4.2. В рамках другого підходу розглянуто метод квантильної регресії і

авторегресійні моделі для умовного квантиля, в яких моделювання умовного квантиля зводиться до вирішення оптимізаційної задачі.

Аналіз методів дозволив провести класифікацію методів, сформульовану у вигляді класифікаційної схеми оцінювання мір динамічних ризиків VaR і CVaR, представлену на рис. 3.2 [103] - [105].

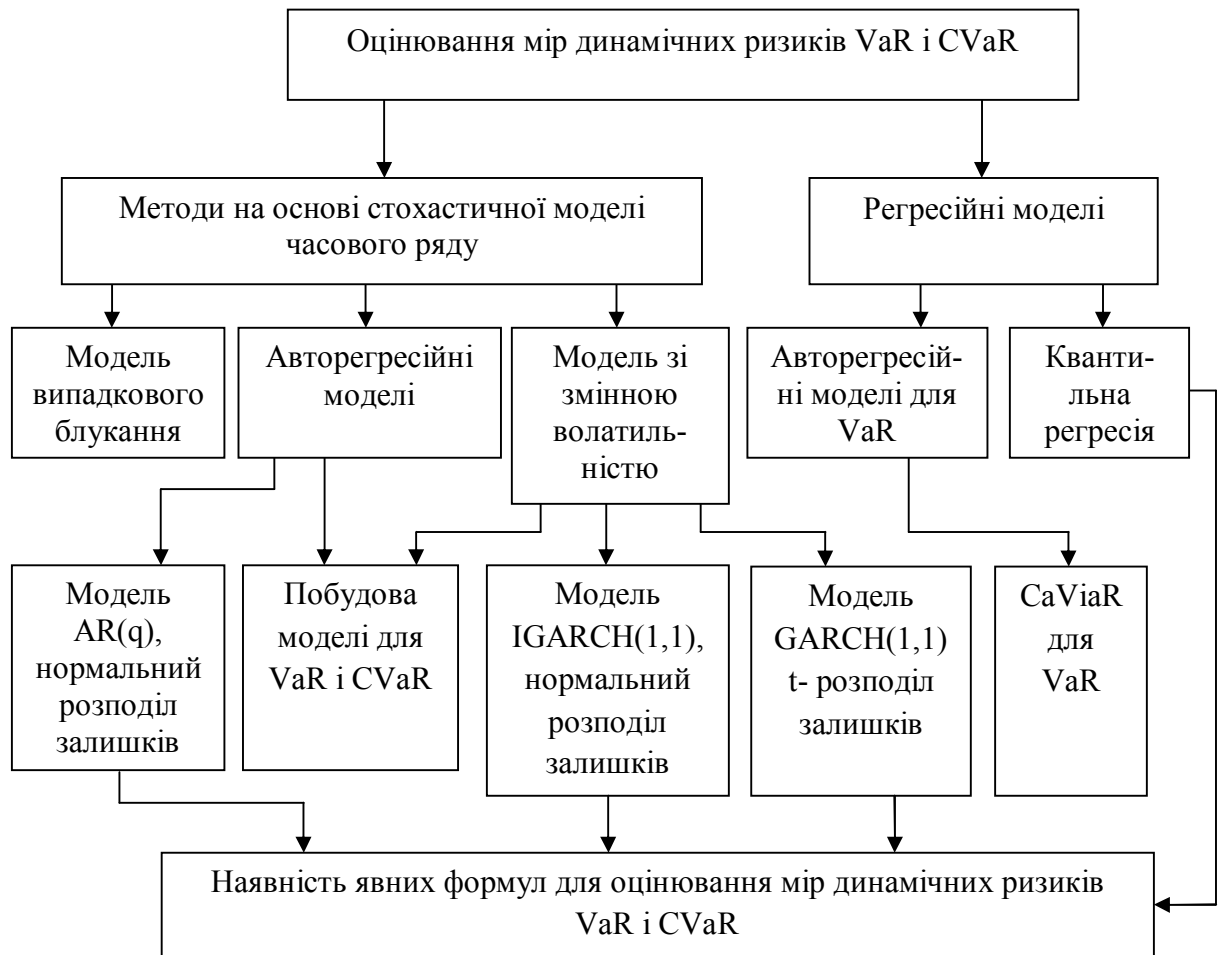


Рис. 3.2. Класифікаційна схема методів оцінювання мір динамічних ризиків VaR і CVaR

Для спрощення процедури вибору методів оцінювання мір динамічних ризиків в роботі запропоновано структурну схему вибору методу (рис. 3.3) [104].

В разі, якщо аналіз даних підтверджує волатильність часового ряду і властивість сильної залежності для ряду його квадратів, для побудови прогнозних оцінок мір динамічних ризиків VaR і CVaR використовується

запропонований у роботі метод згладжування автокореляційної функції - МЗАКФ.

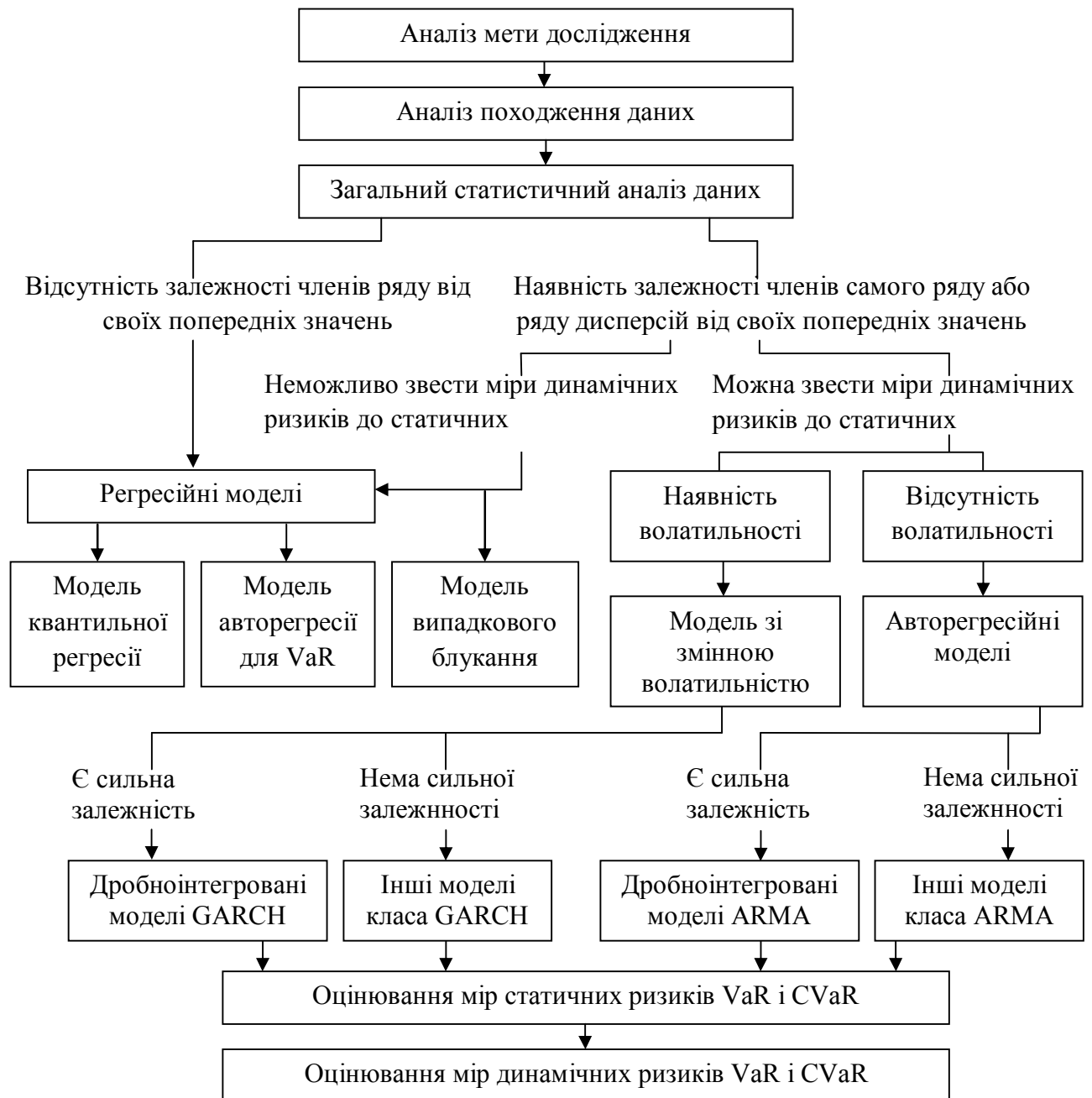


Рис. 3.3. Структурна схема вибору методу оцінювання мір динамічних ризиків VaR і CVaR.

3.2. Побудова моделі прогнозування мір динамічних ризиків VaR і CVaR за МЗАКФ (II етап)

3.2.1. Теоретична основа МЗАКФ. Розглядається часовий ряд $\{X_t, t \in T\}$ із скінченним середнім, який задається своїми спостереженнями у відповідні моменти часу: X_1, \dots, X_N . Вважається, що часовий ряд $\{X_t^2, t \in T\}$, є слабо стаціонарним з властивістю сильної залежності в сенсі означення (2.17). Для моделювання часового ряду з метою врахування властивості сильної залежності використовується модель FIGARCH(p,d,q), детально розглянута в 2.1.3:

$$X_t = \mu + \varepsilon_t = \mu + \sigma_t Z_t, \quad (3.1)$$

$$(1 - \beta(L))\sigma_t^2 = \omega + (1 - \beta(L) - \phi(L)(1 - L)^d)\varepsilon_t^2, \quad (3.2)$$

де μ середнє, σ_t^2 умовна дисперсія, задана на інформаційній множині F_t , що містить всю відому на момент часу t інформацію про ряд, Z_t незалежні, однаково розподілені випадкові величини з середнім 0 і дисперсією 1, $LX_t = X_{t-1}$, $\alpha(L) = \sum_{i=1}^q a_i L^i$, $\beta(L) = \sum_{j=1}^p b_j L^j$, $\phi(L) \equiv (1 - \alpha(L) - \beta(L))(1 - L)^{-1}$, $(1 - L)^d = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(-d)\Gamma(j+1)} (-L)^j$ - оператор дробової різниці, ($\Gamma(\cdot)$ -гамма функція), $d \in (0, 1/2)$; $\omega > 0$; $a_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, q$; $b_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, p$; $\sum_{i=1}^q a_i + \sum_{j=1}^p b_j < 1$.

Після видалення тренду з ряду даних, модель для мір ризику може бути записана у вигляді [68]:

$$VaR_{\alpha}^t = VaR_{\alpha}(Z)\sigma_t, \quad CVaR_{\alpha}^t = CVaR_{\alpha}(Z)\sigma_t. \quad (3.3)$$

де Z випадкова величина, що має такий самий розподіл, що і будь-яка величина із множини $\{Z_t\}$. Прогнозні значення на P кроків можна отримати за екстраполяцією моделі:

$$VaR_{\alpha}^{t+P} = VaR_{\alpha}(Z)\sigma_{t+P}, \quad CVaR_{\alpha}^{t+P} = CVaR_{\alpha}(Z)\sigma_{t+P}. \quad (3.4)$$

Отже, для побудови моделі прогнозування мір динамічних ризиків потрібно побудувати модель для прогнозування дисперсії ряду і знайти оцінки мір статичних ризиків $VaR_{\alpha}(Z)$, $CVaR_{\alpha}(Z)$.

3.2.2. Побудова моделі прогнозування дисперсії. З метою використання оцінок АКФ для великих значень аргументу при побудові прогнозних оцінок дисперсії, у роботі запропоновано новий метод моделювання АКФ на основі оптимізаційної процедури з врахуванням сильної залежності - **оптимізаційний метод згладжування АКФ**.

3.2.2.1. Оптимізаційний метод згладжування автокореляційної функції. Розглядаються три моделі АКФ [33], [134], [135].

Модель I впливає безпосередньо з означення сильної залежності (2.17) і зводиться до регресуванню значень АКФ в подвійному логарифмічному масштабі (метод регресування автокореляції): $\ln \rho_k = b_1 + b_2 \ln k + \varepsilon_k$, ε_k - iid, $k_0 \leq k \leq N$. Параметри моделі b_1, b_2 оцінюються по МНК. Регресія не включає перші k_0 значень автокореляцій, оскільки (2.17) задає асимптотичні властивості. Знаючи оцінку \hat{b}_2 , можна знайти оцінку параметра Херста \hat{H}_{corr} : $\hat{b}_2 = 2\hat{H}_{corr} - 2$.

Модель II використовує регресійну модель для АКФ, яка впливає з означення сильної залежності:

$$\rho_k = \gamma_1 H(2H-1)k^{2H-2} + \gamma_2 + \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k \text{ - iid.}, \quad k_0 \leq k \leq N, \quad (3.5)$$

В якості оцінки параметра Херста H вибирається значення \hat{H}_{mn} , знайдене як

середнє отриманих стандартними методами оцінок \hat{H}_i : $\hat{H}_{mn} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \hat{H}_i$.

Оцінки коефіцієнтів γ_1, γ_2 знаходяться по МНК:

$$(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2) = \arg \min_{(\gamma_1, \gamma_2)} \sum_k (\rho_k - \gamma_1 \hat{H}_{mn}(2\hat{H}_{mn}-1)k^{2\hat{H}_{mn}-2} - \gamma_2)^2.$$

Застосування моделі дає оцінки: $\tilde{\rho}_k = \tilde{\gamma}_1 \hat{H}_{mn}(2\hat{H}_{mn}-1)k^{2\hat{H}_{mn}-2} + \tilde{\gamma}_2$, $k_0 \leq k \leq N$.

Модель III представляє новий метод моделювання АКФ на основі оптимізаційної процедури - **оптимізаційний метод згладжування АКФ**. Для побудови задачі оптимізації фактичні дані розбиваються на "in-sample"

($k = k_0, \dots, k_1$) і "out-of-sample" ($k = k_1 + 1, \dots, k_2$). На "in-sample" значення моделі (3.5), порівнюються зі значеннями АКФ, знайденими по вибірці так, щоб квадрати залишків були близькі до середніх квадратів залишків для Моделі II і не перевищували їх з точністю до релаксаційного параметра q -обмеження (3.7). На "out-of-sample" мінімізується середньо-квадратична помилка моделі одночасно з q ((3.6)), що забезпечує як оптимальність моделі на "out-of-sample", так і її близькість до Моделі II на "in-sample". Параметр $\lambda \in [0, 1]$ - коефіцієнт штрафу, що забезпечує можливість досягнення оптимального співвідношення похибок на інтервалах "in-sample" і "out-of-sample". Формально, оптимізаційна задача може бути записана у вигляді:

$$\lambda q + (1 - \lambda) \frac{1}{k_2 - k_1} \sum_{k=k_1+1}^{k_2} (\rho_k - \tilde{\rho}_k)^2 \rightarrow \min \quad (3.6)$$

$$(\rho_k - \tilde{\rho}_k)^2 \leq \varepsilon^2 + q, \quad k = k_0, \dots, k_1 \quad (3.7)$$

$$q \geq 0 \quad (3.8)$$

Оптимізаційна процедура є параметричною (вибір "in-sample", "out-of-sample" і λ) і допускає налаштування моделі для різних цілей моделювання АКФ. Скоригована оцінка параметра Херста \hat{H}_{opt} знаходиться як в моделі I.

За Моделлю III уточнюється параметр Херста \hat{H}_{opt} і знаходяться оцінки: $\hat{\rho}_k = \hat{\gamma}_1 \hat{H}_{opt} (2\hat{H}_{opt} - 1) k^{2\hat{H}_{opt}-2} + \hat{\gamma}_2, \quad k_1 + 1 \leq k \leq k_2$.

Підсумовуючи викладену вище теорію, можна запропонувати наступний алгоритм **оптимізаційного методу згладжування АКФ** для моделювання і прогнозування автокореляційної функції з врахуванням сильної залежності.

Алгоритм 3.1 для моделювання і прогнозування АКФ для часових рядів із сильною залежністю з використанням оптимізаційного методу згладжування АКФ

Крок 1. Знаходиться оцінка параметра Херста \hat{H}_i за методами, описаними в розділі 2.2.2 і підтверджується наявність у ряду властивості сильної залежності. \hat{H}_{mn} знаходиться як середнє отриманих значень.

Крок 2. Складається регресійне рівняння для автокореляційних коефіцієнтів (3.5). Знаходяться оцінки $\tilde{\rho}_k$ по моделі II.

Крок 3. Вибираються параметри оптимізаційної процедури: вибірка розбивається на дві множини "in-sample", "out-of-sample", вибирається коефіцієнт штрафу $0 \leq \lambda \leq 1$.

Крок 4. Розв'язуючи оптимізаційну процедуру (3.6) - (3.8), знаходяться оцінки параметрів $(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2)$ і коригується значення параметра Херста \hat{H}_{opt} .

Крок 5. Оцінки для коефіцієнтів АКФ знаходяться як:

$$\hat{\rho}_k = \hat{\gamma}_1 \hat{H}_{opt} (2\hat{H}_{opt} - 1) k^{2\hat{H}_{opt}-2} + \hat{\gamma}_2, \quad k_0 \leq k \leq N.$$

Крок 6. Прогнозне значення $\hat{\rho}_{N+1}$ знаходиться шляхом екстраполяції отриманої моделі: $\hat{\rho}_{N+1} = \hat{\gamma}_1 \hat{H}_{opt} (2\hat{H}_{opt} - 1) (N + 1)^{2\hat{H}_{opt}-2} + \hat{\gamma}_2$.

Знайдені оцінки АКФ використовуються для побудови моделі прогнозування дисперсії часових рядів з врахуванням сильної залежності.

3.2.2.2. Прогнозування дисперсії часових рядів з використанням оптимізаційного методу згладжування АКФ. Для прогнозування дисперсії часового ряду у роботі запропоновано метод на основі моделі FIGARCH з використанням оптимізаційної процедури. [64], [136].

Модель FIGARCH(p,d,q) записується як модель $AR(\infty)$ для квадратів процесу ε_t^2 :

$$\varepsilon_t^2 = (1 - \beta(1))^{-1} \omega + \lambda(L) \varepsilon_t^2 + v_t,$$

де $v_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$ некорельовані з середнім 0,

$\lambda(L) \equiv 1 - (1 - \beta(1))^{-1} \varphi(L)(1 - L)^d = \lambda_1 L + \lambda_2 L^2 + \lambda_3 L^3 + \dots$, або

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + v_t. \quad (3.9)$$

Таким чином, побудова моделі зводиться до задачі оцінювання коефіцієнтів $\vec{a} = (a_1, \dots, a_N, \dots)'$ авторегресійної моделі нескінченного порядку. Оцінки будуються за МНК шляхом розв'язання нормальної системи рівнянь Юла-Уокера [7], що, в даному випадку, є нескінченною системою алгебраїчних рівнянь (СЛАР) із різницевиими індексами:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \rho_{|i-j|} a_j = \rho_i, \quad i = 1, \dots, \infty, \quad (3.10)$$

де $\rho_i, \quad i = 0, \dots, \infty$ - коефіцієнти автокореляції для часового ряду $\{X_t^2\}$. Розв'язання (3.10) за стандартним методом редукції є некоректним, оскільки, в силу припущення щодо сильної залежності, ряд автокореляційних коефіцієнтів розбігається, а, отже, не виконується умова регулярності та нормальності матриці системи. Збіжність розв'язку редукованої системи до точного розв'язку не гарантована.

Нескінченні СЛАР з різницевиими індексами в загальному випадку еквівалентні крайовій задачі Рімана. Альтернативою є підхід, запропонований у роботі [137], де показано, що наближений розв'язок систем виду (3.10) буде збігатись до точного розв'язку при редукуванні системи з врахуванням асимптотичної поведінки розв'язку. Вказаний підхід базується на наступній теоремі [137].

Теорема (про збіжність розв'язку редукованої системи до точного розв'язку). Якщо для АКФ часового ряду виконується асимптотичне співвідношення: $\rho_k \sim k^{2d-1} l(k), \quad k \rightarrow \infty, \quad 0 < d < 1/2$, то існує єдиний розв'язок системи (3.10), що задовольняє умові

$$a_k \sim k^{-(1+d)} \left(\frac{l(k)}{B(d, 1-2d)} \right)^{-1/2} \frac{d \sin(\pi d)}{\pi}, \quad k \rightarrow \infty, \quad \text{та він може бути знайдений}$$

шляхом розв'язання редукованої системи рівнянь:

$$\sum_{j=1}^K \tilde{\rho}_{|i-j|} \tilde{a}_j = \tilde{\rho}_i - \sum_{j=K+1}^{\infty} \tilde{\rho}_{|i-j|} j^{-(1+d)}, \quad i = 1, \dots, K,$$

де $\tilde{\rho}_i = \begin{cases} \rho_i, & i < K_1, \\ c i^{2d-1}, & i \geq K_1 \end{cases}$, при цьому $\|\vec{a} - \tilde{a}\|_{C_{K, K_1 \rightarrow \infty}} \rightarrow 0$.

Тут $B(\cdot, \cdot)$ - бета функція. Тоді параметр Херста $H = d + 1/2 \in (1/2, 1)$.

Значення K ($K \leq N$) визначається з умови практичної збіжності розв'язку, оскільки застосування інформаційного критерію Акаїке та його модифікацій у випадку сильної залежності не дає повної відповіді на питання, яким слід вибрати K [138]. Вони лише визначають нижню оцінку цього значення.

Таким чином, для знаходження коефіцієнтів авторегресії потрібно розв'язати редуковану систему:

$$\sum_{j=1}^K \hat{\rho}_{|i-j|} \alpha_j = \hat{\rho}_i, \quad i = 1, \dots, K, \quad (3.11)$$

розв'язок якої буде збігатися до точного при $K \rightarrow \infty$. Особливість запропонованого методу прогнозування полягає в тому, що в якості коефіцієнтів системи беруться оцінки $\hat{\rho}_i$, для $i = 1, \dots, k_1$, побудовані на спостережуваних значеннях часового ряду, для $i = k_1 + 1, \dots, K - 1$ знайдені за Моделлю III з використанням Алгоритму 3.1, $\hat{\rho}_K$ знаходиться по екстраполяції цієї моделі $\hat{\rho}_K = \hat{\gamma}_1 \hat{H}_{opt} (2 \hat{H}_{opt} - 1) K^{2\hat{H}_{opt}-2} + \hat{\gamma}_2$. Розв'язком системи є оцінки $\vec{\hat{\alpha}} = (\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_K)'$.

Теоретичні дослідження дозволили сформулювати метод побудови прогнозу дисперсії сильно залежних часових рядів на основі авторегресійних моделей нескінченного порядку [64] у формі наступного алгоритму.

Алгоритм 3.2 прогнозування дисперсії часових рядів на основі моделі FIGARCH з використанням оптимізаційної процедури

Крок 1. Знаходиться оцінка параметра Херста \hat{H}_{opt} , параметри Моделі III за описаною в Алгоритмі 3.1 процедурою.

Крок 2. Складається редукована система нормальних рівнянь (3.11), знаходяться оцінки $\hat{\rho}_i$: для $i = 1, \dots, k_1$ вибіркові значення автокореляції, для $i = k_1 + 1, \dots, K - 1$ за Моделлю III, $\hat{\rho}_K$ по екстраполяції Моделі III. Розв'язавши (3.11) за методом Холецкого [138], знаходяться оцінку $\vec{\hat{\alpha}} = (\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_K)'$ вектора коефіцієнтів автокореляції.

Крок 3. Визначається лаг редукованої авторегресійної моделі $M \leq K$ з використанням інформаційних критеріїв АІС (інформаційний критерій Акаїке), НҚС (інформаційний критерій Хеннена - Куїна) [7].

Крок 4. Побудована модель використовується для знаходження оцінок дисперсії: $\hat{\sigma}_t^2 = \hat{a}_0 + \sum_{i=1}^M \hat{a}_i \hat{\sigma}_{t-i}^2$, $t = 1, \dots, N + 1$ і прогнозних оцінок дисперсії:

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \hat{a}_0 + \sum_{i=1}^M \hat{a}_i \hat{\sigma}_{t+1-i}^2, \quad t = N + 1, \dots \quad (3.12)$$

3.2.3. Оцінка мір статичних ризиків для залишків моделі.

Використовуючи отримані оцінки дисперсії $\hat{\sigma}_t^2$, можна знайти залишки моделі (3.1) - реалізації випадкової величини Z_t : $\hat{Z}_t = X_t / \hat{\sigma}_t$. Перевіривши приналежність Z_t класу iid і, провівши їх загальний статистичний аналіз, вибирається відповідний метод оцінювання мір статичних ризиків $VaR_\alpha(Z)$ і $CVaR_\alpha(Z)$, де Z випадкова величина, що має такий самий розподіл, що і будь-яка величина із множини $\{Z_t\}$. Проведений аналіз більшості існуючих методів оцінювання мір статичних ризиків, наведених в 2.3.3, дозволив провести їх класифікацію і систематизацію. В якості випадкової величини розглянуто втрати фінансового інструменту, що полегшує фінансовому аналітику аналіз ринку.

3.2.3.1. Класифікація та систематизація методів знаходження VaR та CVaR для випадкової величини. В рамках проведеного аналізу для отримання оцінок мір статичних ризиків було виділено чотири стандартних підходи.

Перший підхід, який отримав найбільше поширення, ґрунтується на оцінюванні функції розподілу - емпіричної або аналітичної. Ряд методів ґрунтується на моделюванні повної функції розподілу. Математичний апарат методів наведено в 2.3.3.1. До таких методів відноситься популярний метод історичного моделювання [92], [95], в якому, використовуючи історичні дані, будується емпірична функція розподілу. У разі, якщо є підстави вважати, що випадкова величина має певний тип розподілу і знайдені оцінки параметрів цього розподілу, для знаходження VaR і CVaR можна скористатися аналітичними формулами [2], [7], [92], [116] або використовувати метод Монте-Карло [92]. Ядерний метод і його модифікації відносяться до непараметричних методів оцінювання [92], [118]. Вони ґрунтуються на інтегральному згладжуванні з заданим ядром емпіричної гістограми і дають прості напіваналітичні вирази для оцінок мір ризиків.

Оскільки VaR є квантиль, а CVaR - середній квантиль, то для побудови оцінок мір ризиків достатньо вивчити правий хвіст функції розподілу. Оскільки в багатьох фінансових задачах функції щільності розподілу асиметричні і мають, так звані, товсті хвости, то застосування методів, заснованих на апріорних припущеннях про розподіли типу нормального, є неспроможним, і має сенс використовувати теорію екстремальних значень - EVT (Extreme Value Theory) [2], [7], [119], [120]. EVT дозволяє аналізувати екстремальні, а, отже, відносно рідкісні події на масиві історичних даних. Два основні методи використовуються в теорії екстремальних значень: метод «block maxima» і POT - метод. Детально методи із застосуванням теорії EVT наведено в 2.3.3.2.

Другий підхід, який не потребує оцінювання функції розподілу, представлений методом квантильного оцінювання [2], [92], [93]. Метод надає готові формули для мір ризику, проте має істотні недоліки. На практиці оцінка, отримана за методом емпіричного квантиля, використовується в якості нижньої межі міри ризику VaR. Деталізація отримання оцінок мір ризиків за методом квантильного оцінювання дана в 2.3.3.3.

Третій підхід, описаний в 2.3.3.4, пропонує алгоритм знаходження мір ризиків у вигляді оптимізаційної задачі [85], [87], [91]. Оптимізаційний метод може бути використаний практично без обмежень на тип розподілу, розмір вибірки, зашумленість емпіричних даних. Однак, використання оптимізаційних процедур вимагає високої кваліфікації користувача і доступу до спеціалізованого програмного забезпечення.

Четвертий підхід пов'язаний з використанням інтегральних перетворень вибірки. У разі, коли явне визначення функції розподілу є складним, широко вживаним прийомом є застосування перетворення Лапласа до втрат (як функції часу) з подальшим чисельним визначенням мір ризику в процесі обернення [139] – [142]. Ця техніка базується на тому, що простори інтегральних перетворень еквівалентні фізичному простору. При використанні параметричного підходу до визначення розподілу, задача зводиться до оцінювання параметрів розподілу в просторі зображень. Для підрахунку мір ризику поновлюється функція розподілу втрат шляхом застосування зворотнього швидкого перетворення Фур'є. Слід зазначити, що представлення функцій розподілу випадкових величин широко використовується в теорії ризику. Визначення VaR шляхом застосування аналітичних формул обернення застосовується в [141]. Достатньо повний огляд методів знаходження VaR та CVaR з використанням інтегральних перетворень представлено в [142]. В роботі також запропонована нова техніка знаходження VaR та CVaR через розв'язання оптимізаційної задачі, сформульованої в [91], де в якості цільової функції використовується її інтегральне представлення у вигляді зворотнього перетворення Фур'є. При цьому формулюється ефективна чисельна процедура мінімізації, що базується на швидкому перетворенні Фур'є.

Результат аналізу методів оцінювання мір статичних ризиків дозволив провести їх класифікацію, представлену у вигляді структурно-ієрархічної схеми на Рис.3.4, що допомагає користувачеві вибрати конкретний метод [102].

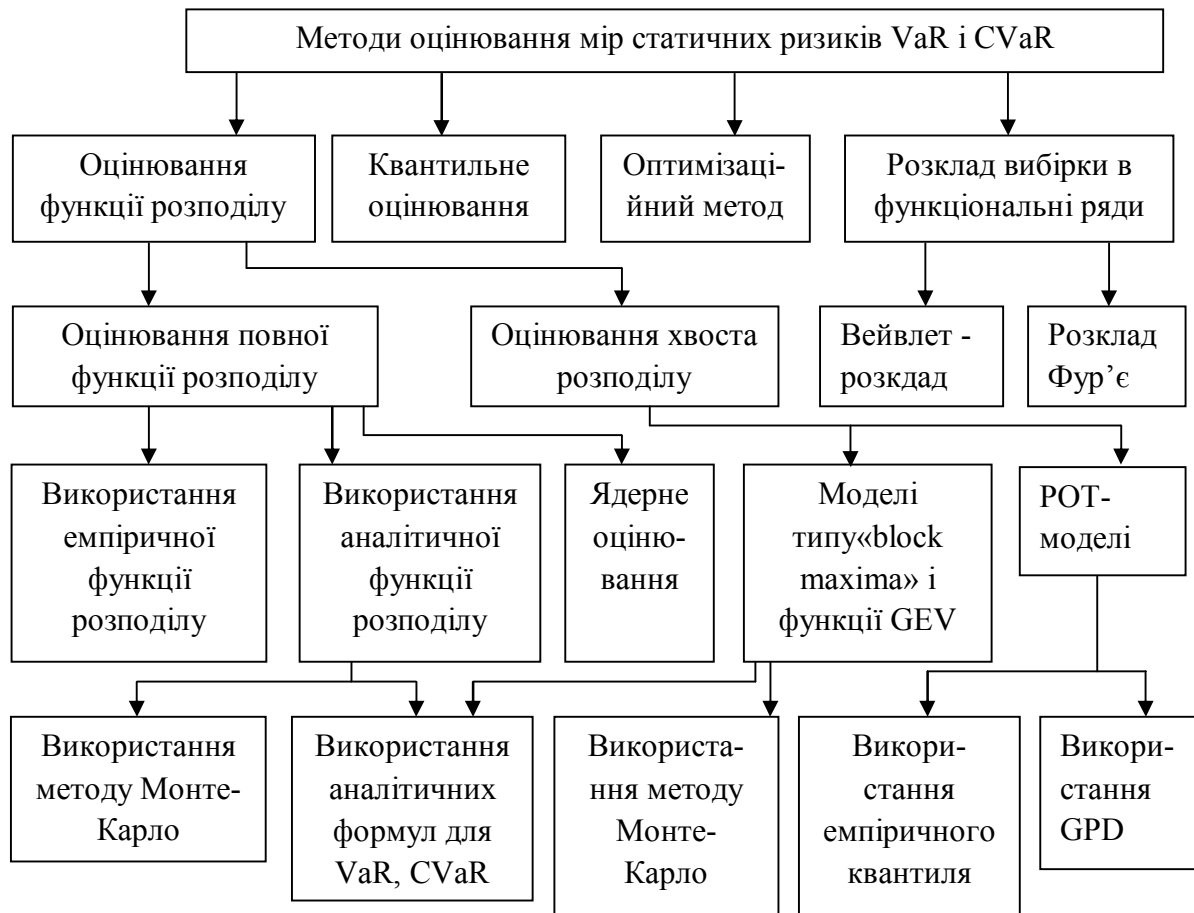


Рис.3.4. Класифікаційна схема оцінювання мір статичних ризиків VaR і CVaR

Аналіз методів оцінювання VaR і CVaR дозволив сформулювати процедуру прийняття рішення щодо вибору методу оцінювання мір статичних ризиків VaR і CVaR в залежності від цілей дослідження і характеристик даних, що підлягають аналізу (рис. 3.5) [102].

Запропонована процедура включає в себе всі кроки, необхідні для прийняття рішення, починаючи від загального статистичного аналізу даних і закінчуючи вибором конкретного методу отримання оцінок.

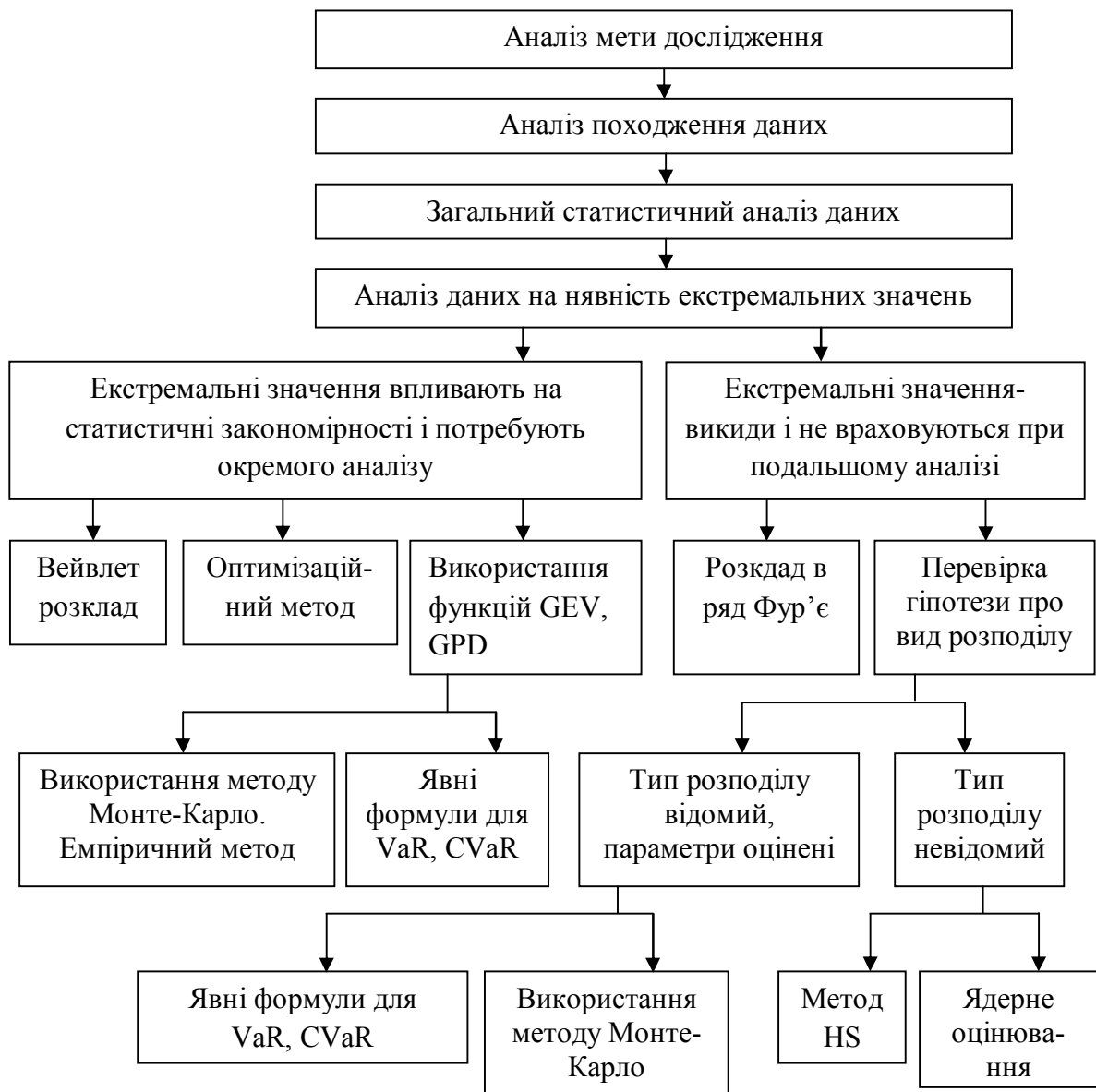


Рис. 3.5. Структурно-ієрархічна схема вибору методу оцінювання VaR і CVaR статичних ризиків

3.2.4. Алгоритм МЗАКФ побудови прогнозу мір динамічних ризиків VaR і CVaR. Теоретичні дослідження дозволили сформулювати наступний алгоритм МЗАКФ для отримання прогнозних оцінок мір динамічних ризиків VaR і CVaR [143] - [146].

Алгоритм 3.3 побудови прогнозу мір динамічних ризиків VaR і CVaR з урахуванням сильної залежності за МЗАКФ

Крок 1. Перевіряються дані на волатильність.

Крок 2. Будується часовий ряд квадратів, аналізується залежність членів ряду від своїх попередніх значень (ARCH ефект). Проводиться аналіз наявності властивості сильної залежності для часового ряду квадратів: знаходження параметра Херста $\hat{H}_i, i=1, \dots, I$ класичними методами, описаними в 2.2.2.

Крок 3. Моделюється АКФ на основі оптимізаційної процедури з врахуванням сильної залежності - Алгоритм 3.1. Знаходяться модельні значення АКФ, проводиться їх кількісний аналіз (знаходження похибок ME - середня похибка, MAE - середня абсолютна похибка, MSE - середньоквадратична похибка, MAPE - середня абсолютна процентна похибка.).

Крок 4. Здійснюється моделювання і прогнозування дисперсії часового ряду на основі моделі FIGARCH з використанням оптимізаційної процедури - Алгоритм 3.2. Використовуючи процедуру бектестінга, проводяться кількісний і якісний аналізи отриманих прогнозних оцінок.

Крок 5. Отримані на Кроці 4 оцінки дисперсії використовуються для знаходження оцінок $Z_t: \hat{Z}_t = X_t / \hat{\sigma}_t$. Перевіривши приналежність Z_t класу iid і провівши їх загальний статистичний аналіз, вибирається відповідний метод оцінювання мір статичних ризиків $VaR_\alpha(Z)$ і $CVaR_\alpha(Z)$ з використанням класифікаційних схем (рис 3.4 і рис. 3.5) і аналізу, проведеного в 2.3.3.

Крок 6. З використанням результатів Кроків 4 і 5 будуються оцінки мір динамічних ризиків $\widehat{VaR}_\alpha^t = \widehat{VaR}_\alpha(Z) \hat{\sigma}_t$, $\widehat{CVaR}_\alpha^t = \widehat{CVaR}_\alpha(Z) \hat{\sigma}_t$. Побудована модель для мір динамічних ризиків використовується для отримання прогнозних значень $\widehat{VaR}_\alpha^{t+P}$, $\widehat{CVaR}_\alpha^{t+P}$ ((3.4)). Метод побудови прогнозу -

прямий, багатокроковий на P кроків вперед, вікно з накопиченням. Для побудови прогнозу на вікні прогнозування використовуються прогнозні оцінки дисперсії (Крок 4), значення мір статичних ризиків на вікні прогнозування вважаються незмінними (Крок 5). Потім значення індексу часового ряду збільшується на P і процедура повторюється необхідну кількість разів. Таким чином, на кожному кроці застосування алгоритму відбувається врахування нових даних і уточнення моделі. Отримані P -крокові прогнози об'єднуються в один, здійснюється аналіз отриманих оцінок: кількісний аналіз (знаходження похибок ME, MAE, MSE) і якісний аналіз (статистика PoE, тести Купеця, Крістофферсена, V -тест).

Висновки до розділу 3

У третьому розділі дисертації представлений запропонований у роботі системний підхід до моделювання і прогнозування мір динамічних ризиків VaR і CVaR. В рамках розробленого підходу отримані наступні результати.

Проведено аналіз існуючих методів оцінювання мір статичних і динамічних ризиків VaR і CVaR. Проведений аналіз дозволив зробити систематизацію та класифікацію найбільш популярних методів оцінювання мір ризиків. Для зручності вибору методу, що відповідає конкретним даним, класифікація методів оформлена у вигляді класифікаційних схем (рис. 3.2 і рис. 3.4). Систематизація полягає у приведенні методів до єдиних термінів і позначень, наведених в різних джерелах. За основу обрані економетричні поняття та позначення, що спрощує використання методів при вирішенні конкретних прикладних задач. Запропоновані структурні схеми вибору методу оцінювання мір динамічних і статичних ризиків (рис. 3.3 і рис. 3.5 відповідно) надають користувачу упорядкований набір методів дослідження і позбавляють його від необхідності проведення трудомісткого пошуку та аналізу відповідних методик оцінювання мір ризику.

Розроблено новий метод моделювання АКФ на основі оптимізаційної процедури для часових рядів із сильною залежністю – оптимізаційний метод згладжування АКФ. Метод заснований на агрегації результатів декількох стандартних методів для оцінювання параметра Херста і дозволяє побудувати оптимальну оцінку параметра. Метод може бути адаптований в залежності від кінцевої мети оцінювання. Для зручності практичного застосування, метод сформульований у вигляді покрокового алгоритму (Алгоритм 3.1).

Розроблено новий метод для побудови прогнозу дисперсії волатильних часових рядів при наявності сильної залежності, сформульований у вигляді Алгоритму 3.2. Прогноз будується на основі авторегресійної моделі нескінченного порядку, до якої зведена модель FIGARCH. Новим є метод

оцінювання коефіцієнтів моделі, що базується на розв'язанні нескінченної системи нормальних рівнянь Юла-Уолкера. В якості коефіцієнтів системи беруться значення, отримані за допомогою моделювання АКФ на основі запропонованої оптимізаційної процедури, що дозволяє адаптувати модель АКФ саме для використання її в алгоритмі прогнозування. Для розв'язання системи рівнянь Юла-Уокера пропонується застосування методу редукування, що враховує асимптотичну поведінку коефіцієнтів моделі АКФ. Порядок редукованої авторегресійної моделі визначається за інформаційними критеріями.

Розроблено новий метод для побудови прогнозу мір динамічних ризиків VaR і CVaR – метод згладжування автокореляційної функції (МЗАКФ). Метод використовується для моделювання і прогнозування мір динамічних ризиків для волатильних часових рядів, ряд дисперсій яких має властивість сильної залежності. Метод використовує розроблені у роботі методи моделювання АКФ на основі оптимізаційної процедури та метод побудови прогнозу дисперсії волатильних часових рядів на основі моделі FIGARCH. Для зручності практичного використання метод сформульовано у вигляді Алгоритму 3.3.

РОЗДІЛ 4

ЧИСЕЛЬНА АПРОБАЦІЯ СИСТЕМНОГО ПІДХОДУ ДО ПОБУДОВИ ПРОГНОЗНИХ ОЦІНОК МІР ДИНАМІЧНИХ РИЗИКІВ VaR І CVaR

У четвертому розділі роботи приведена практична реалізація запропонованого системного підходу до побудови прогнозних оцінок мір ризиків VaR і CVaR із застосуванням методу згладжування АКФ на штучно змодельованих і реальних часових рядах логарифмічної дохідності індексів різних фондових бірж. Проведено кількісний і якісний аналізи отриманих оцінок. Проаналізовано якість прогнозних оцінок мір ризиків для рядів різної волатильності.

4.1. Демонстрація застосування структурно-ієрархічної схеми вибору методу оцінювання мір динамічних ризиків VaR і CVaR

Для зручності користування схемою, представленою на рис. 3.3, процес вибору методу сформульовано у вигляді покрокового алгоритму.

Алгоритм 4.1 вибору методу оцінювання мір динамічних ризиків VaR і CVaR

Крок 1. Визначається мета дослідження отримання оцінок VaR і CVaR для заданого часового ряду.

Крок 2. Проводиться загальний аналіз досліджуваного часового ряду і часового ряду дисперсій. Для аналізу залежності членів ряду від власних значень в попередні моменти часу часового ряду (ряду його квадратів) використовується тест Льюнга-Бокса. У разі відхилення основної гіпотези ("no serial correlation") існує можливість використання авторегресійних моделей.

Крок 3. Вважається вірною гіпотеза про можливість зведення мір динамічних ризиків до статичних, що дає можливість використовувати для оцінювання VaR_{α}^t і $CVaR_{\alpha}^t$ формули (2.38) і (2.39). Після побудови моделі

повинно бути отримано підтвердження або спростування цієї гіпотези. В останньому випадку, слід обрати альтернативну гілку в схемі на рис. 3.2.

Крок 4. Часовий ряд перевіряється на волатильність для обґрунтування можливості використання моделей із змінною волатильністю для його опису. Для цього будується часовий ряд дисперсій методом ковзного вікна. Розмір вікна вибирається рівним половині довжини вибірки, крок рівним 1. Перевіряється побудований ряд на залежність від своїх попередніх значень, використовуючи тест Льюнг-Боксу. Залежність дисперсій від попередніх значень обґрунтовує можливість використання моделей зі змінною волатильністю для опису вихідного часового ряду. Вибирається модель класу GARCH. Визначаються порядки і параметри моделі. Використовуючи тести (BDS-тест і критерій відношення дисперсій), перевіряються залишки GARCH-моделі на приналежність класу iid. Використовується побудована модель для оцінювання σ_t^2 .

Крок 5. Використовуючи знайдені на попередньому кроці оцінки дисперсії, знаходяться залишки моделі $\hat{Z}_t = X_t / \hat{\sigma}_t$, які представляють собою реалізації випадкової величини Z . Використовуючи BDS-тест, критерій відношення дисперсій, тест Харке-Бера, аналізуються властивості $\{\hat{Z}_t\}$. Відповідно до отриманих результатів здійснюється, з використанням структурно-ієрархічної схеми вибору методу оцінювання VaR і CVaR статичних ризиків (рис.3.5), оцінювання $VaR_\alpha(Z)$ і $CVaR_\alpha(Z)$. Отримуються оцінки $\widehat{VaR}_\alpha(Z)$, $\widehat{CVaR}_\alpha(Z)$.

Крок 6. Для перевірки гіпотези про можливість використання значень мір статичних ризиків при обчисленні мір динамічних ризиків (крок 3), будується лінійна регресія для емпірично визначених значень ризиків відносно оцінок ряду дисперсій, отриманих на кроці 5. Значення коефіцієнтів лінійної регресії визначаються з використанням МНК і проводиться стандартний аналіз з використанням тесту Фішера. Якщо рівняння регресії є

істотним, залежність Var_α^t і $CVaR_\alpha^t$ від дисперсій також є істотною і гіпотеза, що прийнята на Кроці 3, є вірною. В іншому випадку, відповідно до рис. 3.3, необхідно використовувати інші моделі (наприклад, регресійні).

Крок 7. Будуються оцінки мір динамічних ризиків Var_α^t і $CVaR_\alpha^t$ (формули (2.38) і (2.39)).

Крок 8. Аналізується якість отриманих оцінок мір динамічних ризиків з використанням тестів Купеця, Крістофферсена і V - тесту.

Демонстрація і верифікація запропонованого алгоритму виконується на штучно змодельованих даних і реальних часових рядах.

Штучні дані. Розглядається задача оцінювання VaR і CVaR з довірчим рівнем $\alpha = 0.9$ на даних, штучно змодельованих по моделі $GARCH(1,1)$ з коефіцієнтами $a_0 = 1$, $a_1 = 0.1$, $b_1 = 0.8$ з нормально розподіленими залишками моделі.

Загальний аналіз даних, перевірка гіпотези про можливість зведення оцінювання мір динамічних ризиків до статичних для штучних даних є зайвими. Клас моделі також визначено. Визначаються фактичні параметри моделі для згенерованого часового ряду по ММП: $\hat{a}_0 = 0.9$, $\hat{a}_1 = 0.09$, $\hat{b}_1 = 0.81$. Результати аналізу залишків моделі на iid з використанням BDS-тесту (для $m=4$: $0.1098 < 1.9126$) і критерія відношення дисперсій ($0.38 < 1.96$) підтверджують незалежність і однакову розподіленість залишків моделі. Використовуються фактичні параметри моделі для побудови ряду оцінок дисперсії $\hat{\sigma}_t^2$. Будуються $\{Z_t\}$.

Оцінки $\widehat{VaR}_{0.9}(Z)$ знаходяться з використанням 10 різних методів, які представляють різні підходи до оцінювання мір статичних ризиків, описаних в 2.3.3. Отримані оцінки порівнюються з теоретичним значенням квантиля нормально розподілених залишків моделі $GARCH(1,1)$ $VaR_Real1 = 1.28$ і емпіричним значенням квантиля згенерованого фактичного набору даних

$VaR_Real2 = 1.27$ - (відносні помилки $RE1$ і $RE2$ відповідно). З використанням отриманих оцінок $\widehat{VaR}_{0.9}(Z)$, будуються оцінки $\widehat{VaR}_{0.9}^t$ динамічних ризиків. Аналізується якість отриманих оцінок з використанням статистики Купеця (р-значення статистики LR_{pof}), статистики Крістофферсена (р-значення статистики LR_{ind}) і їх комбінованої статистики (р-значення статистики LR_{cc}) (Табл. 4.1).

В таблиці використані наступні позначення. Застосування методу історичного моделювання HS ((2.25), (2.26)) дозволило отримати оцінку $hist1$, використання дискретного методу Рокфеллера-Урясьєва (2.27) – оцінку $hist2$. Оцінка $pd1$ була отримана за явними формулами (2.28) в припущенні нормального розподілу з оцінками параметрів, отриманих за ММП. Оцінка, отримана на базі оцінених параметрів нормального розподілу з використанням методу Монте-Карло - $mc1$, метод Річардсона - mcR . Використання теорії екстремальних значень дозволило отримати наступні оцінки. Оцінка $GEVq$ була отримана за явними формулами з використанням функції GEV (2.30), (2.31), параметри якої були оцінені по ММП. Застосування методу Монте-Карло для отриманої функції GEV дало оцінку $GEVmc$. Аналогічні оцінки з використанням функції GPD ((2.32)) - $GPDq$ і $GPDmc$. Оцінка $POTem$ була отримана з використанням емпіричного POT -методу. Значення статистик LR_{pof} і LR_{ind} асимптотично мають розподіл $\chi^2(1)$, статистика LR_{cc} - розподіл $\chi^2(2)$. Отримані значення оцінок вважаються достовірними, якщо р-значення перевищують заданий рівень значущості критерія (в даному випадку 0.05).

Таблиця 4.1

Оцінювання $VaR'_{0,9}$ для штучних даних і результати аналізу оцінок

Метод/ оцінка	$\widehat{VaR}_{0,9}(Z)$	$RE1$	$RE2$	$LRpof$	$LRind$	$LRcc$
<i>hist1</i>	1.2850	-0.27%	-1.09%	0,894	0,937	0,988
<i>hist2</i>	1.2846	-0.24%	-1.06%	0,406	0,515	0,573
<i>pd1</i>	1.2795	0.15%	-0.67%	1,000	0,992	1,000
<i>mc1</i>	1.2760	0.43%	-0.39%	1,000	0,992	1,000
<i>mcR</i>	1.2777	0.30%	-0.52%	0,714	0,671	0,854
<i>GEVq</i>	1.2924	-0.85%	-1.67%	0,973	0,710	0,488
<i>GEVmc</i>	1.2797	0.14%	-0.68%	0,665	0,625	0,808
<i>GPDq</i>	1.2704	0.87%	0.06%	0,664	0,793	0,879
<i>GPDmc</i>	1.2717	0.76%	-0.05%	0,506	0,992	0,986
<i>POTem</i>	1.2822	-0.05%	-0.87%	0,353	0,425	0,473

З використанням аналогічних методів, знайдені оцінки $\widehat{CVaR}_{0,9}(Z)$, які порівнювалися зі значенням $CVaR_Real1 = 1.755$, знайденим для VaR_Real1 , і $CVaR_Real2 = 1.724$, знайденим для VaR_Real2 (відносні помилки $RE1$ і $RE2$ відповідно). Знайдені оцінки $\widehat{CVaR}'_{0,9}$ проаналізовані з використанням V-тесту (Таблиця 4.2). Чим ближче статистики до 0, тим краще отримані оцінки.

Результати, наведені в таблицях, свідчать про коректність оцінок мір статичних і динамічних ризиків.

Таблиця 4.2

Оцінювання CVaR для штучних даних і результати аналізу оцінок

Метод/ оцінка	$\widehat{CVaR}_{0.9}(Z)$	$RE1$	$RE2$	V_1	V_2	V
<i>hist1</i>	1,745	0,57%	-1,23%	-0,041	-3,666	1,853
<i>hist2</i>	1,745	0,57%	-1,23%	0,025	-3,527	1,776
<i>pd1</i>	1,753	0,11%	-1,70%	-0,005	-3,627	1,816
<i>mc1</i>	1,747	0,48%	-1,32%	-0,005	-3,627	1,816
<i>mcR</i>	1,752	0,18%	-1,63%	-0,046	-3,660	1,853
<i>GEVq</i>	1,794	-2,22%	-4,07%	-0,103	-3,717	1,910
<i>GEVmc</i>	1,797	-2,37%	-4,22%	-0,051	-3,663	1,857
<i>GPDq</i>	1,747	0,46%	-1,35%	-0,135	-3,846	1,990
<i>GPDmc</i>	1,748	0,40%	-1,41%	-0,124	-3,910	2,017
<i>POTem</i>	1,744	0,63%	-1,17%	-0,050	-3,635	1,843

Таким чином, проведений аналіз дозволяє зробити висновок, що помилки побудованих різними методами оцінок розглянутих мір ризику однорідні і зневажливо малі. Отримані результати свідчать про можливість застосування методів, наведених в класифікаційній схемі (рис. 3.2), для оцінювання розглянутих мір ризику, в разі, якщо вихідні дані, мають заздалегідь відомі властивості.

На рис. 4.1, як приклад, представлені змодельовані за цією моделлю $VaR'_{0.9}$ і $CVaR'_{0.9}$, де для оцінки мір статичних ризиків використовувався метод Монте-Карло для отриманої функції GEV ($GEVmc$).

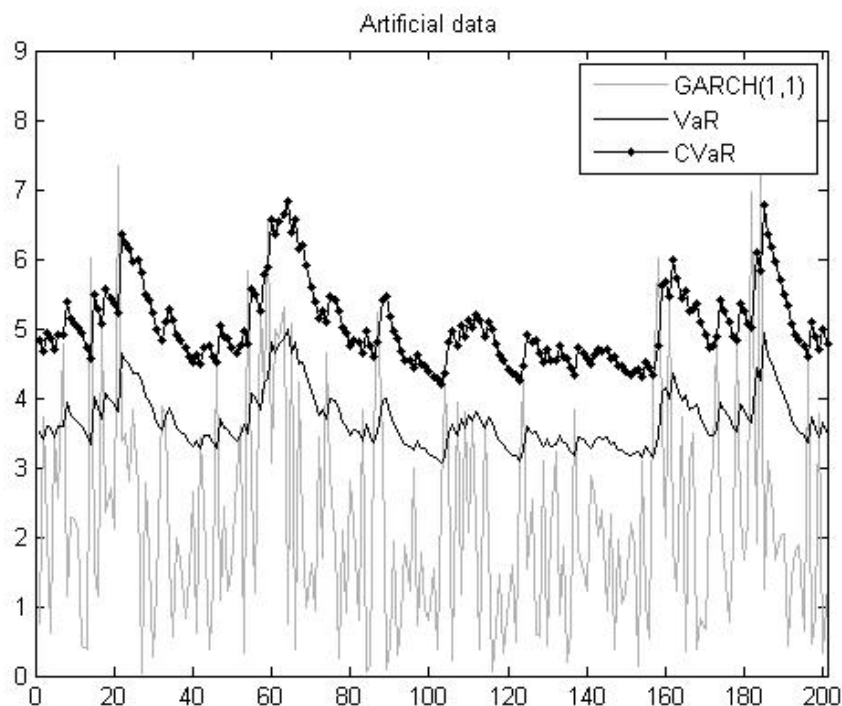


Рис.4.1. Змодельовані $VaR'_{0,9}$ і $CVaR'_{0,9}$ для штучних даних.

Реальні дані. В якості реальних даних розглядаються часові ряди логарифмічної дохідності на денній основі азіатських фондових індексів за період з 2005 по 2015 роки: найстаріший і найбільш відомий індекс азіатських ринків Nikkey 225 Stock Index (часовий ряд N225) - композитний індекс 225-ти найбільших компаній, чиї акції торгуються на Tokyo Stock Exchange, і композитний індекс CSI 300 Index ETF (CNY), обчислений на основі 300 стоків, які торгуються на шанхайської стокової біржі (часовий ряд CSI300) [104], [147].

Як відомо [83], [148], азіатські фондові ринки дуже неоднорідні. Часовий ряд N225 характеризується відносно низькою гомогенною волатильністю. У той же час, ряд CSI300 має високу кластерну волатильність. Метою дослідження часового ряду N225 є визначення мір ризиків при регулярній поведінці ринку. Відповідно до цього з даних були видалені значення, що відповідають трьом часовим інтервалам з високою волатильністю світової фінансової системи: 01.07.2008 - 01.07.2009, 01.01.2011 - 01.07.2011, 01.02.2013 - 01.12.2013.

Для часового ряду N225 вибирається довірчий рівень рівний $\alpha = 0.95$. В таблиці 4.3 наведено описові статистики для часового ряду даних N225 (X_t) і ряду його квадратів (X_t^2). Як видно з таблиці, коефіцієнт асиметрії часового ряду близький до 0, а значення куртозиса до 3, отже, розподіл близький до нормального. Результат тесту Льюнга-Бокса для $m=7$ (значення Q статистик перевищують критичне значення 12.017) свідчить, що основна гіпотеза відхиляється і слід брати до уваги залежність даних (і їх квадратів) від своїх попередніх значень.

Таблиця 4.3

Описові статистики для часового ряду N225

ЧР/ Стати- стика	Розмір вибірки	Середнє	Ст.від- хил.	Коеф. асиметрії	Куртозис	Тест Льюнга- Бокса
X_t	1686	-0.00018	0.0130	0.055	3.268	18.493
X_t^2	1686	.000016	0.0003	1.557	4.372	91.019

Приймається гіпотеза про можливість зведення мір динамічних ризиків до мір статичних ризиків. Будується часовий ряд дисперсій методом ковзного вікна розміром 843 з кроком 1 і перевіряється на наявність залежності, використовуючи тест Льюнга-Бокса. Значення Q статистик для $m=7$ (501.942) перевищують критичне значення (10.645), що свідчить про відхилення гіпотези про відсутність залежності. Залежність ряду дисперсій від попередніх значень обґрунтовує можливість використання моделей зі змінною волатильністю для опису даного часового ряду, а для моделювання дисперсії використовувати моделі класу GARCH.

Для моделювання часового ряду N225 використовується модель $GARCH(3,3)$ (2.9) з параметрами: $\omega = 0$, $a_1 = 0.06$, $a_2 = 0.08$, $a_3 = 0.03$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0.48$, $b_3 = 0.26$. Проводиться аналіз залишків моделі $GARCH(3,3)$.

Результати BDS-тесту для $m=4$ ($0,558 < 0,577$) і критерія відношення дисперсій ($0.75 < 1.96$) свідчать, що залишки побудованої GARCH моделі є iid.

Аналіз результатів критерія відношення дисперсій для $\widehat{Z}_t = X_t / \widehat{\sigma}_t$ підтверджує їх належність класу iid, а результати тесту Харке-Бера ($5.624 < 5.649$) свідчать, що розподіл $\{\widehat{Z}_t\}$ близький до нормального. Отже, використовуються п'ять з розглянутих вище методів, які доцільно застосувати для нормального розподілу.

Таблиця 4.4 містить оцінки мір статичних ризиків $\widehat{VaR}_{0.95}(Z)$ і $\widehat{CVaR}_{0.95}(Z)$, р-значення результатів тестів Купеця, Крістофферсена і результати V-тесту для мір динамічних ризиків. Позначення в таблиці відповідають позначенням, що використовуються в таблицях 4.1 і 4.2.

На відміну від результатів, отриманих для штучно змодельованих даних, значення критеріїв якості не є однорідними: тести дають позитивний результат (р-значення статистик $LRpof$, $LRind$, $LRcc$ мають бути більше ніж вибране значення рівня значущості критерія 0.05) тільки в разі, коли був використаний метод $pd1$. Таким чином, розподіл залишків дійсно найкращим чином відповідає нормальному і для оцінювання VaR слід застосовувати явні формули в припущенні нормального розподілу з оцінками параметрів, отриманих за ММП.

Таблиця 4.4

Оцінки $\widehat{VaR}_{0.95}(Z)$ і $\widehat{CVaR}_{0.95}(Z)$ статичних ризиків і результати аналізу оцінок для мір динамічних ризиків для ряду $N225$

Мет./о цін.	$\widehat{VaR}_{0.95}$	$LRpof$	$LRind$	$LRcc$	$\widehat{CVaR}_{0.95}$	V_1	V_2	V
<i>hist1</i>	1,902	0,018	0,073	0,012	2,233	0,0170	-0,0001	0,0086
<i>pd1</i>	1,703	0,186	0,053	0,064	2,126	0,0166	0,0007	0,0087
<i>GEVq</i>	1,826	0,044	0,021	0,009	2,401	0,0167	0,0011	0,0088
<i>GPDq</i>	1,762	0,135	0,043	0,042	2,319	0,0174	-0,0024	0,0099
<i>POTem</i>	1,172	0,000	0,024	0,000	1,782	0,0173	-0,0038	0,0106

Для перевірки гіпотези про можливість використання значень мір статичних ризиків при обчисленні мір динамічних ризиків використовується підхід, описаний в алгоритмі 4.1 (Крок 6). В нашому випадку значення F-статистики перевищує критичне значення (коефіцієнт детермінації 0.986), отже, регресія визнається значущою. Таким чином, використання моделі (2.37) - (2.39) є обґрунтованим.

На рис. 4.2 представлені змодельовані $VaR_{0.95}^t$ і $CVaR_{0.95}^t$ для розглянутого часового ряду, де для оцінки мір статичних ризиків використовувалися явні формули в припущенні нормального розподілу з оцінками параметрів, отриманих за ММП (*pd1*).

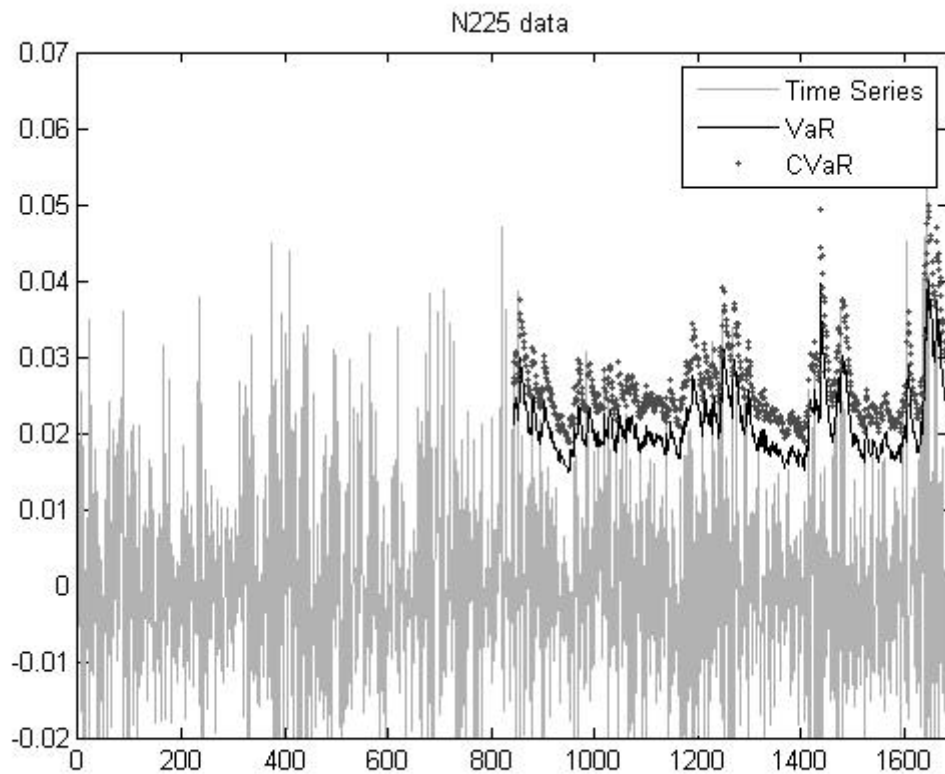


Рис. 4.2. Змодельовані $VaR'_{0.95}$ і $CVaR'_{0.95}$ для часового ряду $N225$

Аналогічний аналіз проведений при побудові оцінок мір динамічних ризиків для часового ряду $CSI300$. Вибирається довірчий рівень рівний $\alpha = 0.9$. У таблиці 4.5 наведені характеристики для самого часового ряду і ряду квадратів, а також статистика тесту Льюнга-Бокса.

Таблиця 4.5

Описові статистики для часового ряду $CSI300$

ЧР/ Стати- стика	Розмір вибірки	середнє	Ст. відхи- лення	Коеф. асиме- трії	Куртозис	Тест Льюнга- Бокса
X_t	2445	-0.0002	0.00393	0.186	3.268	22.754
X_t^2	2455	0.00007	.00005	1.659	5.127	78.487

Результат тесту Льюнга-Бокса для $m=7$ свідчить про наявність залежності даних (і їх квадратів) від своїх попередніх значень.

Приймається гіпотезу про можливість зведення мір динамічних ризиків до статичних. Будуються часові ряди дисперсій і середньоквадратичних відхилень методом ковзного вікна розміром 1222 і кроком 1. Перевіряються зазначені ряди на залежність від своїх попередніх значень, використовуючи тест Льюнга-Бокса. Значення Q статистик для сьомого лага (8585.195 для ряду дисперсій і 8583.008 для ряду стандартних відхилень) перевищують критичне значення 12.017, що свідчить про відхилення основної гіпотези про незалежність.

Спираючись на отримані в ході дослідження дані про ряд, проводиться налаштування моделі. В якості моделі для часового ряду *CSI300* використовується модель *GARCH*(5,0) (2.9) з коефіцієнтами $\omega = 0.00014$, $a_1 = 0.0713$, $a_2 = 0.15300$, $a_3 = 0.12165$, $a_4 = 0.18222$, $a_5 = 0.10322$.

Проводиться аналіз залишків моделі $\hat{Z}_t = X_t / \hat{\sigma}_t$. Результати BDS-теста для $m=3$ 0,13975 менше відповідного квантиля нормального розподілу 0,8888, отже основна гіпотеза приймається. Статистика критерію відношення дисперсій ($1.6815 < 1.96$) також підтверджує, що залишки моделі *GARCH*(5,0) ііd. Для перевірки гіпотези про нормальність розподілу залишків застосовується тест Харке-Бера. Статистика Харке-Бера дорівнює 267.19, що більше допустимого значення 5.968. Отже, для часового ряду залишків моделі гіпотеза про нормальний розподіл має бути відхилена.

Для підтвердження гіпотези про можливість використання значень мір статичних ризиків при обчисленні мір динамічних ризиків, будується лінійна регресія з оціненими по МНК коефіцієнтами, і проводиться F-тест перевірки значущості лінійної регресії. Значення F-статистики дорівнює 46478.676, що перевищує критичне значення статистики, значення коефіцієнта детермінації дорівнює 0.974, тому регресія визнається значущою при заданому рівні значущості (0.05).

Для проведення порівняльного аналізу при оцінюванні мір статичних ризиків для залишків моделі використовуються ті ж 5 методів, що

використовувалися для ряду $N225$. Результати оцінювання наведено в таблиці 4.6.

Таблиця 4.6

Оцінки $\widehat{VaR}_{0,9}(Z)$ і $\widehat{CVaR}_{0,9}(Z)$ і результати аналізу оцінок для мір динамічних ризиків для $CSI300$

Метод/ оцінка	$\widehat{VaR}_{0,9}$	$LRpof$	$LRind$	$LRcc$	$\widehat{CVaR}_{0,9}$	V_1	V_2	V
<i>hist1</i>	1,315	0,000	0,465	0,000	1,059	0,0193	0,0016	0,0104
<i>pd1</i>	1,334	0,000	0,291	0,000	1,837	0,0051	-0,0015	0,0033
<i>GEVq</i>	1,271	0,001	0,775	0,002	2,028	0,0042	-0,0008	0,0025
<i>GPDq</i>	1,187	0,156	0,951	0,054	1,922	0,0026	-0,0010	0,0018
<i>POTem</i>	1,012	0,284	0,846	0,553	1,403	0,017	-0,0013	0,0065

Аналіз результатів дозволяє зробити висновок, що критерію якості задовольняють оцінки мір ризиків, отримані за явними формулами з використанням функції GPD , параметри якої були оцінені по ММП ($GPDq$) і оцінки, отримані з використанням методу POT-емпіричний ($POTem$). Таким чином, для цього часового ряду не можна використовувати моделі з нормальним розподілом залишків. Залишки демонструють товсті хвости, і, відповідно до класифікаційної схеми (рис. 3.4), слід застосовувати моделі EVT.

Змодельовані $VaR'_{0,9}$ і $CVaR'_{0,9}$ для часового ряду $CSI300$ з використанням функції GPD , параметри якої були оцінені по ММП, наведені на рис. 4.3.

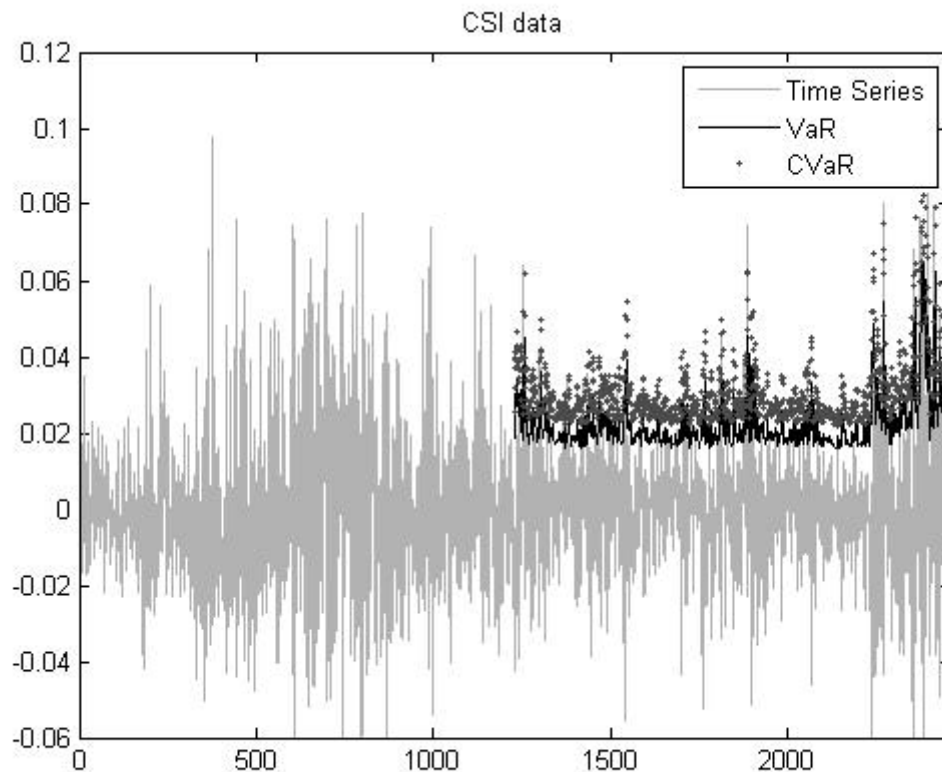


Рис. 4.3. Змодельовані $VaR_{0,9}^t$ і $CVaR_{0,9}^t$ для часового ряду $CSI300$

4.2. Демонстрація застосування структурно-ієрархічної схеми вибору методу оцінювання мір статичних ризиків VaR і CVaR

Для апробації запропонованої схеми вибору методу оцінювання мір статичних ризиків VaR і CVaR (рис. 3.4, 3.5) і верифікації методів, розглянутих в 2.3.3, проведена оцінка мір ризиків з використанням різних методів для штучно змодельованих даних [102].

Перша група даних (N) змодельована відповідно до закону нормального розподілу з параметрами: $\mu=0.5$; $\sigma=5$. Друга група (T) - за розподілом t - local-scaled з параметрами $\mu=0.5$; $\sigma=5$; $\nu=4$. У кожній групі було згенеровано по 10000 значень. Довірчий рівень мір ризиків вибирався рівним $\alpha=0,95$ і $\alpha=0,99$ для першої і другої груп даних, відповідно.

У таблиці 4.7 наведені оцінки мір ризиків, отримані на основі оцінювання повної функції розподілу.

Таблиця 4.7

Оцінки мір статичних ризиків VaR і CVaR методами, що використовують повну функцію розподілу

Ризик/метод	Exact	HS	R-U	PE	PEMC	PEMCR
VaR _{0,95} (N)	8,72	8,57	8,57	8,52	8,35	8,50
RE	0,00	0,02	0,02	0,02	0,04	0,03
CVaR _{0,95} (N)	10,81	10,57	10,57	10,58	10,49	10,56
RE	0,00	0,02	0,02	0,02	0,03	0,02
VaR _{0,99} (N)	12,13	12,26	12,25	12,13	12,11	12,17
RE	0,00	-0,01	-0,01	0,00	0,00	0,00
CVaR _{0,99} (N)	13,83	13,93	13,93	13,82	13,95	13,84
RE	0,00	-0,01	-0,01	0,00	-0,01	0,00
VaR _{0,95} (T)	11,16	10,99	10,98	11,02	10,95	11,05
RE	0,00	0,02	0,02	0,01	0,02	0,01
CVaR _{0,95} (T)	16,51	15,95	15,95	16,03	16,00	16,11
RE	0,00	0,03	0,03	0,03	0,03	0,02
VaR _{0,99} (T)	19,23	19,65	19,65	19,07	19,06	19,09
RE	0,00	-0,02	-0,02	0,01	0,01	0,01
C VaR _{0,99} (T)	26,60	26,67	26,67	26,17	26,92	26,12
RE	0,00	0,00	0,00	0,02	-0,01	0,02

Використовуючи формули (2.28), (2.29) для вибраних значень параметрів, були отримані точні значення VaR і CVaR - EXACT колонка в таблиці. Як представники методів, що базуються на емпіричній функції розподілу, використовувалися метод історичного моделювання - HS ((2.25), (2.26)) і дискретний метод Рокфеллера-Урясьєва ((2.27)) - R-U. Оцінки мір ризиків PE були отримані за формулами (2.28), де для оцінок параметрів нормального розподілу використовувався ММП. Отриманий нормальний розподіл було

використано для методу Монте-Карло і оцінки мір ризиків для цього методу позначені в таблиці PEMC. Через PEMCR позначені оцінки, отримані з використанням методу Річардсона.

Таблиця 4.8 містить результати, отримані за методами, які аналізують хвіст розподілу.

Таблиця 4.8

Оцінки мір статичних ризику VaR і CVaR методами, що використовують хвіст розподілу

Ризик/метод	GEVQ	GEVMC	GPDQ	GPDMC	POTE
VaR _{0,95} (N)	7,89	7,88	8,83	8,90	8,71
RE	0,10	0,10	-0,01	-0,02	0,00
CVaR _{0,95} (N)	10,33	10,28	10,96	10,92	10,71
RE	0,05	0,05	-0,01	-0,01	0,01
VaR _{0,99} (N)	12,13	12,19	12,51	12,54	12,45
RE	0,00	-0,01	-0,03	-0,03	-0,03
CVaR _{0,99} (N)	13,82	13,79	13,88	13,78	14,10
RE	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,02
VaR _{0,95} (T)	10,96	10,91	11,72	11,83	11,08
RE	0,02	0,02	-0,05	-0,06	0,01
CVaR _{0,95} (T)	15,92	15,95	16,60	16,49	16,06
RE	0,04	0,03	-0,01	0,00	0,03
VaR _{0,99} (T)	19,30	19,30	19,79	19,66	19,67
RE	0,00	0,00	-0,03	-0,02	-0,02
CVaR _{0,99} (T)	24,26	24,71	24,73	24,35	26,79
RE	0,09	0,07	0,07	0,08	-0,01

Оцінивши параметри функції GEV за ММП, отримуємо оцінки мір ризику GEVQ. Використовуючи метод Монте-Карло для отриманого розподілу,

отримуємо оцінки GEVMC. Аналогічні методи, які використовували функцію GPD і формули (2.32), дали оцінки GPDQ і GPDMC відповідно. Емпіричний POT - метод дав оцінки, позначені POTE.

Отримані оцінки порівнювалися з точними значеннями. Через RE позначена відносна похибка.

Результати обчислень свідчать про коректність формул, наведених у роботі. Помилка обчислень пов'язана з обмеженістю вибірки, дискретизацією даних і наявністю обчислювальних похибок. Слід зазначити, що наявність аналітичних формул пришвидшує обчислення мір ризику, але не призводить до істотного збільшення точності обчислень. Для реальних даних результати можуть істотно відрізнятися, оскільки основними факторами, що впливають на похибку, будуть виконання апіорних гіпотез про тип розподілів і обмеженість вибірки.

4.3. Практичний приклад моделювання автокореляційної функції за оптимізаційним методом згладжування АКФ

Для апробації оптимізаційного методу згладжування АКФ, викладеного в 3.2.2.1, були використані штучно згенеровані і реальні дані [33].

Для генерації даних використовується модель FIGARCH (1; 0.35; 1) з параметрами $\omega = 0,1$; $\alpha_1 = 0,1$; $\beta_1 = 0,1$. В якості історичних даних були обрані доходи на денній основі індексу РТС - офіційного індикатора Фондової біржі РТС («Российская Торговая Система») за 2005 – 2015 роки (ряд РТС). Індекс РТС - загальновизнаний показник стану російського фондового ринку, що розраховується в режимі реального часу протягом всієї торговельної сесії біржі РТС при кожній зміні цін акцій, які включені в список для його розрахунку.

Розрахунок індексу РТС здійснюється в пунктах. Значення індексу РТС визначається як відношення сумарної ринкової капіталізації акцій, включених в список для розрахунку індексу, до сумарної ринкової

капіталізації на початкову дату, помножене на значення індексу на початкову дату і на коригувальний коефіцієнт. Зміна вартості акцій кожної компанії впливає на величину індексу РТС. При цьому, чим більше частка компанії в індексі, тим сильніше її вплив. У базу індексу РТС входить 50 найбільш капіталізованих і ліквідних акцій. Серед найбільших представлених: Газпром (15,00% в індексі), Лукойл (15,00%), Ощадбанк Росії (13,59%), Роснефть (9,03%). Індекс РТС використовується для того, щоб відстежувати загальний стан ринку акцій країни, віхи його розвитку та перспективи руху в майбутньому. Крім того, індекс складається таким чином, щоб максимально адекватно відобразити структуру економіки держави. Тому цілком логічно, що в індексі РТС більша частина припадає на видобувні і нафтогазові компанії. У таблиці 4.9 наведені характеристики для самого часового ряду РТС і ряду квадратів, а також статистика тесту Льюнга-Бокса.

Таблиця 4.9

Описові статистики для часового ряду РТС

ЧР/ Статистика	Розмір вибірки	Середнє	Ст.від- хил.	Коеф. асиметрії	Куртозис	Тест Льюнга- Бокса
X_t	1250	0.0256	2.3083	-0.2462	12.6851	24.5351
X_t^2	1250	5.3254	18.2088	14.0732	280.2855	63.0501

Для моделювання АКФ розглядалися вибіркові значення і три моделі, представлені в 3.2.2.1: вибіркова АКФ (позначення *Data*), результати побудови АКФ за Моделлю I (позначення *H corr*), за Моделлю II (позначення *H mean*) та за Моделлю III (позначення *H optim*). На рис. 4.4 і рис. 4.5 представлені графіки АКФ, побудовані по вибірці та Моделі I для штучних і реальних даних в подвійному логарифмічному масштабі відповідно. З рисунків видно, що Модель I не може бути достатньо адекватною для реальних даних, хоча для штучно згенерованих даних (тобто

з контрольованими властивостями) вона досить достовірна. Знайдене відповідно до цієї моделі значення параметра Херста позначено як \hat{H}_{corr} .

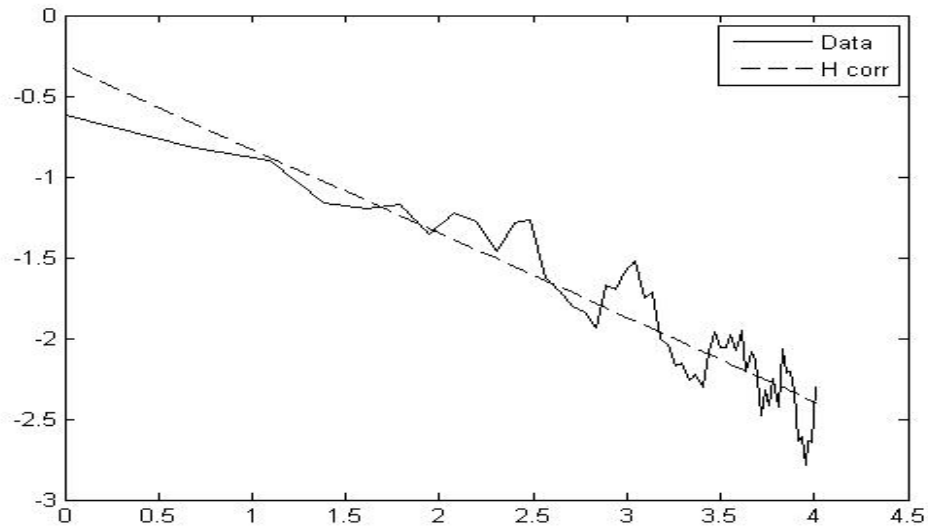


Рис.4.4. Графіки АКФ, побудовані по вибірці та Моделі I для штучних даних в логарифмічному масштабі

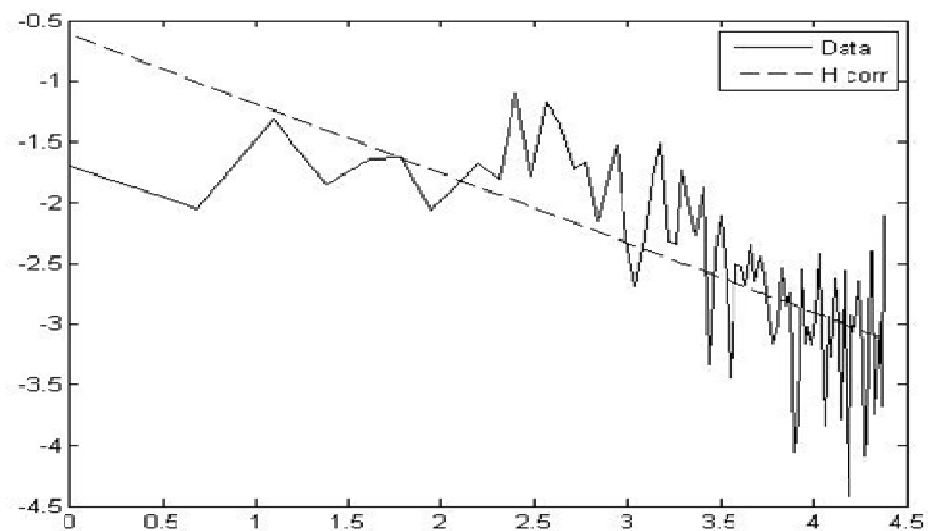


Рис. 4.5. Графіки АКФ, побудовані по вибірці та Моделі I для ряду РТС в логарифмічному масштабі

Для побудови Моделі II використовувався метод агрегації. Для знаходження оцінок параметра Херста використовувалися 8 класичних методів, описаних в 2.2.2 для штучно змодельованих даних (ШТ) і ряду РТС (РТС): R/S метод, метод абсолютних значень агрегованого ряду, метод

вибіркової дисперсії агрегованого ряду, модифікований метод періодограм, методи диференціювання дисперсії, Хігуччі, залишків регресії, періодограм. Результати оцінювання параметра Херста наведені в таблиці 4.10.

Таблиця 4.10

Значення параметра Херста для штучних даних (точне значення $H = 0,85$) і індексу РТС для восьми методів

Метод/ оцінка	Оцінка H		$\Delta H / H(\%)$	
	Ш.Д.	РТС	Ш.Д.	РТС
Абсолютних значень агрегованого ряду	0.8700	0.9285	2.3505	4.1750
Вибіркової дисперсії агрегованого ряду	0.8053	0.8714	5.2633	2.2337
Модифікований метод періодограм	0.8711	1.0989	2.4807	23.2915
Диференціювання дисперсії.	0.8179	0.6768	3.7759	24.0613
Хігуччі	0.9994	1.0085	17.5730	13.1455
Залишків регресії	0.8600	0.8849	1.1819	0.7173
Періодограм	0.8692	0.8222	2.2574	7.7483
R/S	0.7586	0.8391	10.7536	5.8562

Аналіз отриманих оцінок показує, що значення параметра, отримані методами Хігуччі, модифікованим методом періодограм і методом диференціювання дисперсії виявляються недостовірними для реальних даних, а, отже, не можуть бути використані для агрегації. Значення $\hat{H}_{mn} = 0,8692$, агреговане по п'яти методам, що залишилися, використовується в (3.5) для побудови оцінок АКФ.

Графіки АКФ для штучно згенерованих і реальних даних, побудовані по вибірці і по трьом розглянутим моделям, зображені на рис. 4.6 і рис. 4.7 відповідно.

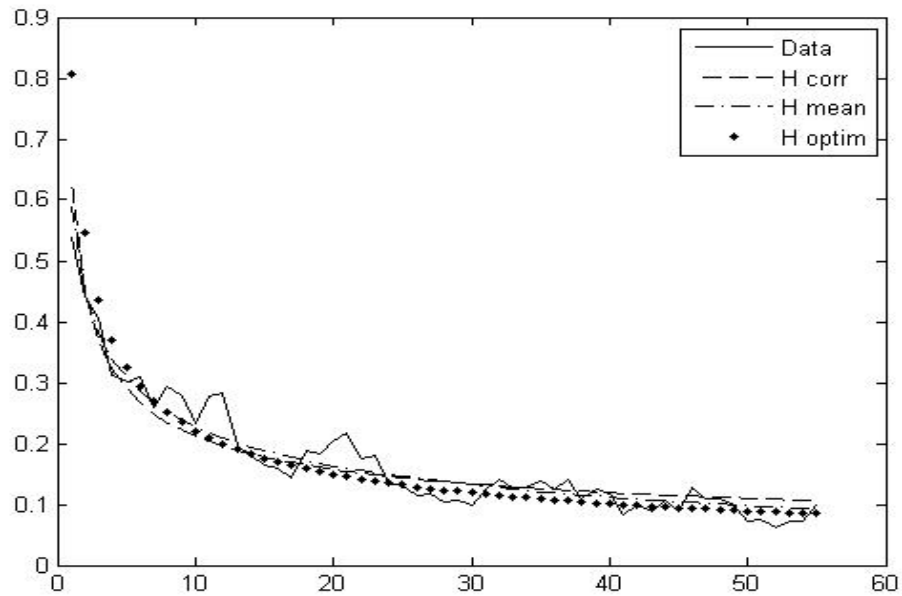


Рис 4.6. Графіки АКФ, побудовані по Моделі I (H_{corr}), Моделі II (H_{mean}) і Моделі III (H_{optim}) для штучних даних

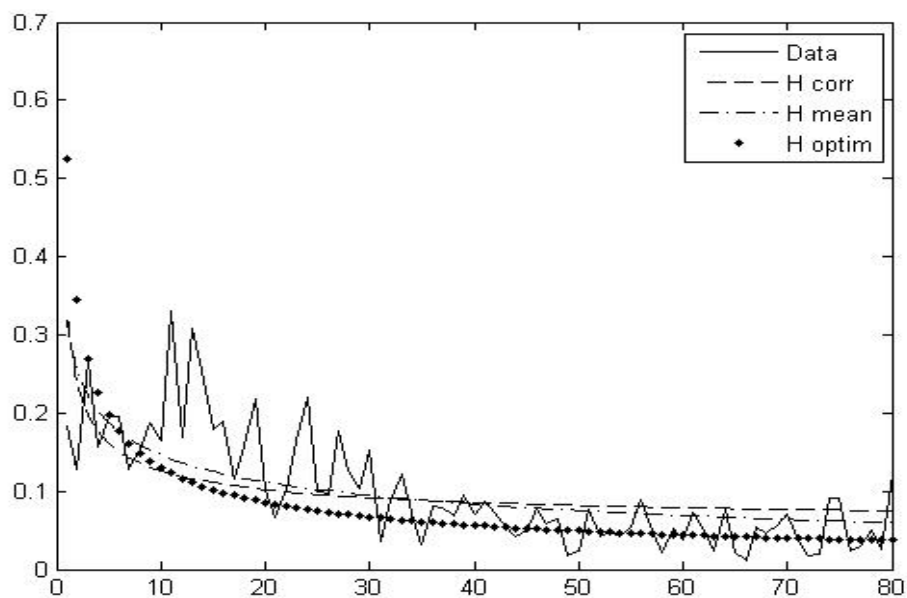


Рис 4.7. Графіки АКФ, побудовані по Моделі I (H_{corr}), Моделі II (H_{mean}) і Моделі III (H_{optim}) для ряду РТС

Як видно з рис. 4.6 і рис. 4.7, крива, побудована по Моделі II, відтворює АКФ істотно краще ніж крива, побудована по Моделі I, яка не враховувала сильну залежність.

Однак, при збільшенні аргументу АКФ обидві розглянуті моделі не відображають властивість середнього. Щоб поліпшити прогностну здатність моделі, застосовується оптимізаційний підхід (Модель III). У таблиці 4.11 наведені результати вирішення оптимізаційної задачі (3.6) – (3.8) при різних значеннях параметра λ .

Таблиця 4.11

Результати оптимізаційної процедури для штучних даних і ряду РТС

λ	Цільова функ		q		σ^2		H	
	Ш.Д.	РТС	Ш.Д.	РТС	Ш.Д.	РТС	Ш.Д.	РТС
0.1	0.0673	0.8094	0.0672	0.8645	0.0679	0.3140	0.8416	0.6770
0.2	0.0674	0.7544	0.0672	0.8645	0.0679	0.3140	0.8416	0.6770
0.3	0.0674	0.6993	0.0672	0.8645	0.0679	0.3140	0.8416	0.6770
0.4	0.0675	0.6443	0.0672	0.8645	0.0679	0.3140	0.8416	0.6770
0.5	0.0676	0.5893	0.0672	0.8645	0.0679	0.3140	0.8416	0.6770
0.6	0.0661	0.5342	0.0855	0.8645	0.0532	0.3140	0.8561	0.6770
0.7	0.0613	0.4792	0.1049	0.8645	0.0427	0.3140	0.8701	0.6770
0.8	0.0539	0.4241	0.1230	0.8645	0.0366	0.3140	0.8823	0.6770
0.9	0.0442	0.3691	0.1399	0.8645	0.0336	0.3140	0.8930	0.6770

У таблиці застосоване позначення: $\sigma^2 = \frac{1}{k_2 - k_1} \sum_{k=k_1+1}^{k_2} (\rho_k - \tilde{\rho}_k)^2$. Аналіз результатів, представлених в таблиці, показує, що модель, побудована на штучних даних, є більш гнучкою. Для неї результати оптимізації істотно залежать від λ , що дозволяє регулювати баланс між точністю моделі на бажаному часовому інтервалі і підпорядкуванню умовам сильної залежності. У той же час, реальні дані задовольняють умові сильної залежності тільки з

деякою точністю і результат оптимізації практично не залежить від λ . Отже, побудована для них оптимальна модель відповідає деякому ідеальному часовому ряду з сильною залежністю, у якого АКФ близька до АКФ реального часового ряду на інтервалі "out-of-sample".

Графіки АКФ, отримані з використанням оптимізаційної процедури для $\lambda = 0.5$, зображені на рис. 4.6 і рис. 4.7 (криві H_{optim}). Очевидно, вони є більш прийнятними з точки зору наближення фактичних даних для великих значень аргументу.

Кількісні характеристики аналізу якості отриманих з використанням трьох моделей значень АКФ наведені в Табл. 4.12:

Таблиця 4.12

Похибки наближення АКФ для штучних даних та індексів PTC

Метод/ похибка	ME		MAE		MSE		MAPE(%)	
	Ш.Д.	PTC	Ш.Д.	PTC	Ш.Д.	PTC	Ш.Д.	PTC
Модель I	-0.02	0.0276	0.023	0.033	0.0007	0.0014	29.06	116.27
Модель II	-0.01	-0.016	0.017	0.028	0.0004	0.0010	20.59	90.06
Модель III	-9e-4	-0.008	0.014	0.021	0.0003	0.0008	16.68	49.64

Як видно з таблиці 4.12, оцінки АКФ, отримані з використанням оптимізаційної процедури (Модель III), мають найменше відхилення від оцінених коефіцієнтів автокореляції, що підтверджує ефективність запропонованого методу для моделювання АКФ.

4.4. Приклад побудови прогнозу дисперсії часового ряду на основі моделі FIGARCH з використанням оптимізаційної процедури

Побудуємо прогнози дисперсій для двох часових рядів, що розглядалися в 4.3, - для часового ряду, штучно згенерованого за моделлю FIGARCH (1; 0.35; 1) з параметрами $\omega = 0,1$; $\alpha_1 = 0,1$; $\beta_1 = 0,1$, та часового ряду

РТС [64]. З метою побудови прогнозу дисперсій, значення рядів піднесені до квадрату.

Для побудови прогнозу значення часового ряду розбиваються на дві частини: модельну "in-sample" і перевірочну "out-of-sample". У даній роботі розміри "in-sample" і "out-of-sample" неперервні і спочатку однакові. При цьому, часовий інтервал "in-sample" передує "out-of-sample". Дослідження ряду і побудова моделей виконується на даних з "in-sample". Після цього будується прогноз на P кроків вперед і звіряється з реальними значеннями з "out-of-sample". Запропонований метод передбачає побудову тільки короткострокових прогнозів (в даному прикладі $P=5$), оскільки ґрунтується на авторегресійній моделі часового ряду. Для підтвердження стійкості результату дана процедура (вікно з накопиченням) повторюється багаторазово. Для отримання кінцевих характеристик якості прогнозу все P -крокові прогнози об'єднуються в один.

Розглядаються два методи для побудови прогнозу. Метод I – стандартний метод, використовує підхід прогнозування по авторегресійній моделі з коефіцієнтами, оціненими за ММП, описаний в 2.1.2 та 2.1.4. Порядок авторегресії $M=26$ визначено за допомогою інформаційних критеріїв AIC, HQC.

Метод II використовує запропонований у роботі метод на основі моделі FIGARCH з використанням оптимізаційної процедури, описаний в 3.2.2.2. Прогнозування дисперсії часового ряду здійснюється відповідно до Алгоритму 3.2.

Значення параметра Херста (Крок 1) визначається з використанням трьох методів: R/S метод, метод періодограм, метод вибіркової дисперсії агрегованого ряду: 0.8391, 0.8222, 0.6768 відповідно. В якості оцінки параметра Херста вибирається середнє отриманих значень $\hat{H}_{mn}=0.7794$. Використання оптимізаційної процедури (Алгоритм 3.1) уточнює оцінку:

$\hat{H}_{opt} = 0.6931$. Таким чином, значення параметра Херста підтверджує наявність сильної залежності.

На Кроці 2 визначається порядок редукування $K = 80$ і, розв'язавши редуковану систему (3.11), знаходяться оцінки коефіцієнтів автокореляції. З використанням інформаційних критеріїв, визначається порядок авторегресії $M = 26$ (Крок 3). Побудована модель використовується для знаходження прогнозних оцінок дисперсії часового ряду (Крок 4.). Прогноз для дисперсії будується на 5 кроків вперед та усереднюється на цьому ж періоді, що відповідає стандартній в фінансовій галузі процедурі прогнозування середньої дисперсії доходів фінансового інструменту на тижневій основі. Потім індекс значень часового ряду збільшується на 5 та процедура повторюється. Таким чином, на кожному кроці модель перебудовується для врахування актуальних даних. Для отримання прогнозу по стандартному методу використовується аналогічна процедура.

На рис. 4.8 представлені усереднені по п'яти значенням квадрати згенерованного часового ряду ($\text{Smoothed } X^2$), значення згладжених прогнозів дисперсії за стандартним методом (Method 1) та методом на основі моделі FIGARCH з використанням оптимізаційної процедури (Method 2) для штучно згенерованого часового ряду.

З графіку видно, що прогноз, отриманий за Методом II, значно краще відтворює як абсолютні відхилення фактичного часового ряду, так і тенденції локальних трендів (зростання-спадання) в порівнянні з прогнозом, отриманим стандартним методом. Суттєвою перевагою запропонованого методу є також значне зменшення затримки при прогнозуванні точок перелому локального тренду.

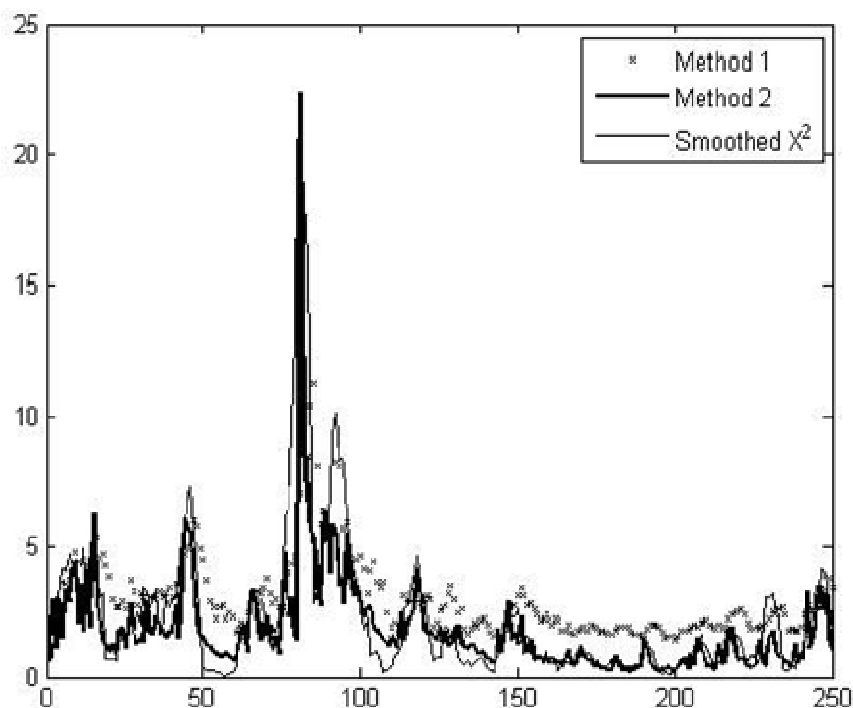


Рис 4.8. Результати прогнозування дисперсії для штучно згенерованого часового ряду

Для порівняння траєкторій прогнозів моделей використовується Діболда-Маріано тест, описаний в 2.1.5. Отримана статистика теста: $DM=0.948 < 1.96$. Таким чином, для штучно згенерованих даних траєкторія прогнозу за методом на основі моделі FIGARCH подібна траєкторії прогнозу, отриманого стандартним методом, що свідчить про коректність запропонованого методу, оскільки на даних з контрольованими властивостями, обидва методи, в цілому, подібні та дозволяють отримати достовірний прогноз.

Результати прогнозування для реального часового ряду доходів індекса РТС графічно зображені на рис. 4.9. Реальні дані задовольняють припущенням, покладеним в основу побудови прогнозу, не в повній мірі, а, отже, якість прогнозу суттєво гірша, що видно з рисунка. Особливістю цього випадку є те, що прогноз, отриманий за методом на основі моделі FIGARCH, є більш консервативний в порівнянні з прогнозом, отриманим стандартним методом, що обумовлюється згладженням АКФ. Як і для штучних даних, він значно краще відтворює як абсолютні відхилення фактичного часового ряду,

так і тенденцію локальних трендів, та також демонструє значне зменшення затримки при прогнозуванні точок перелому локального тренду.

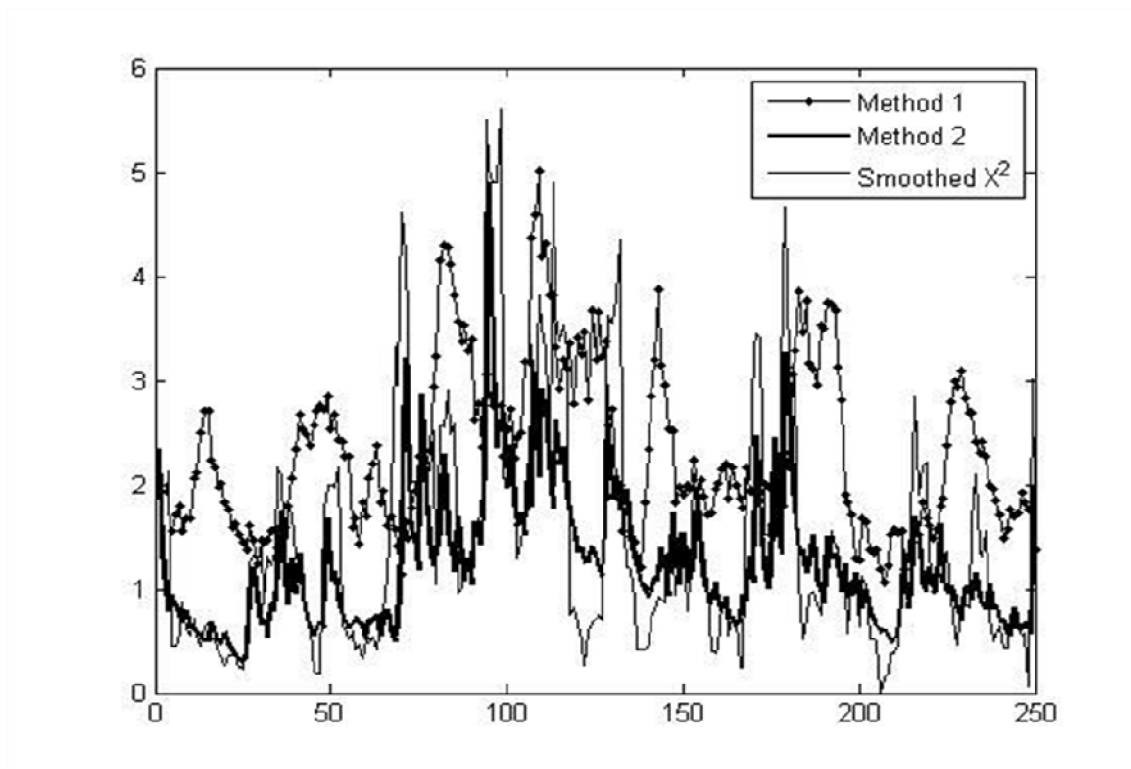


Рис 4.9. Результати прогнозування дисперсії для часового ряду індексу PTC

Отже, запропонований метод на основі моделі FIGARCH з використанням оптимізаційної процедури має переваги в порівнянні зі стандартним методом прогнозування для сильно волатильних часових рядів.

Характеристика порівняння прогнозних траєкторій за Діболда-Маріано тестом: $DM=4.51 > 1.96$. Отже, на відміну від випадку штучних даних, прогнози, отримані за новим методом та за стандартним методом суттєво різняться.

Діболда-Маріано тест дозволяє визначати лише подібність/відмінність прогнозів, побудованих за різними моделями. Для кількісної оцінки якості прогнозів у роботі знайдено міри похибок ME, MAE, MSE та MAPE. Отримані значення приведено в таблиці 4.13.

Таблиця 4.13

Похибки прогнозу для штучних і реальних даних

Метод/ похибка	ME		MAE		MSE		MAPE (%)	
	РТС	Ш.Д.	РТС	Ш.Д.	РТС	Ш.Д.	РТС	Ш.Д.
Method1	0.666	0.842	1.507	1.252	5.157	2.196	262.94	240.51
Method2	-0.55	-0.261	1.017	0.569	4.435	0.711	81.156	76.61

Значення похибок підтверджують результати, отримані при графічному аналізі. Похибки прогнозу за запропонованим у роботі методом (Method 2) менші за похибки прогнозу, отриманого за стандартним методом (Method 1). При цьому похибки, отримані при прогнозуванні згенерованого часового ряду, менші в порівнянні з похибками прогнозування для реальних даних. Відношення похибок для різних методів змінюється при переході від штучних даних до реальних даних, що також свідчить про перевагу застосування запропонованого методу при прогнозуванні поведінки реальних сильно волатильних часових рядів в порівнянні зі стандартним методом.

4.5. Чисельна апробація МЗАКФ

Для демонстрації запропонованого Алгоритму 3.3, сформульованого в 3.2.4, в роботі побудований прогноз мір динамічних ризиків ($\alpha = 0.9$) для часового ряду $N225$, розглянутого в 4.1. Детальний аналіз самого ряду і його квадратів, проведений в 4.1 (табл 4.3), свідчить про можливість використання для моделювання ряду моделей класу GARCH. Техніка побудови прогнозу аналогічна застосованій в 4.4.

Розглядається половина всієї генеральної вибірки - 843 значення. Для знаходження параметра Херста (Крок 2 Алгоритму 3.3) використовуються п'ять методів: R/S метод, метод абсолютних значень агрегованого ряду, метод

вибіркової дисперсії агрегованого ряду, метод залишків регресії, метод періодограм . Середнє отриманих значень: $\hat{H}_{mn} = 0.7387$. Уточнена в результаті оптимізаційної процедури (Алгоритм 3.1) оцінка параметра: $\hat{H}_{opt} = 0.7281$. Значення параметра підтверджує наявність сильної залежності.

Здійснюється моделювання σ_t^2 (Крок 4 Алгоритму 3.3) по новому методу на основі моделі FIGARCH з використанням оптимізаційної процедури (оцінки, отримані з використанням методу позначені $_SACF$) і, для порівняння, моделюється σ_t^2 за стандартною методикою по моделі $AR(p)$ з коефіцієнтами авторегресії, знайденими по ММП (позначення $_st$). Порядок редукування визначається рівним $K = 75$. Порядок авторегресійної моделі, визначений із застосуванням інформаційних критеріїв, дорівнює $M = 55$.

Результати застосування інформаційних критеріїв наведені в Додатку Б: на рис.Б1 для АІС та на рис.Б2 для НҚС. Результати критерію відношення дисперсій ($0.99 < 1.96$ для нового методу і $0.69 < 1.96$ для стандартного) підтверджують, що залишки побудованих моделей належать класу iid.

Для побудови оцінок мір динамічних ризиків будуються реалізації випадкової величини Z_t (Крок 5 Алгоритму 3.3) і проводиться їх аналіз. Результат критерію відношення дисперсій ($0.98 < 1.96$ для нового методу і $0.99 < 1.96$ для стандартного) підтверджують приналежність $\{Z_t\}$ класу iid.

Результати оцінювання мір статичних ризиків $\widehat{VaR}_{0.9}(Z)$, $\widehat{CVaR}_{0.9}(Z)$ наведено в таблиці 4.14.

Таблиця 4.14

Оцінки мір статичних ризиків $\widehat{VaR}_{0.9}(Z)$, $\widehat{CVaR}_{0.9}(Z)$

Міра/Метод	<i>hist</i>	<i>pd</i>	<i>GEVq</i>	<i>GPDq</i>	<i>POTem</i>
$\widehat{VaR}_{0.9}(Z)_{_SACF}$	1.4442	1.5721	1.4942	1.5350	1.2281
$\widehat{CVaR}_{0.9}(Z)_{_SACF}$	2.4396	2.1375	2.3901	2.4128	2.1501
$\widehat{VaR}_{0.9}(Z)_{_st}$	1.3959	1.4993	1.3680	1.3954	1.1940
$\widehat{CVaR}_{0.9}(Z)_{_st}$	2.1735	2.0475	2.1719	2.2244	1.9417

Для знаходження оцінок $\widehat{VaR}_{0.9}(Z)$, $\widehat{CVaR}_{0.9}(Z)$ використовувалися наступні методи: метод історичного моделювання (*hist*), явні формули в припущенні нормального розподілу з оцінками параметрів, отриманих за ММП (*pd*), явні формули з використанням функцій GEV і GPD, параметри яких були оцінені по ММП (*GEVq* і *GPDq* відповідно), емпіричний POT-метод (*POTem*).

З урахуванням отриманих результатів, знаходяться оцінки мір динамічних ризиків $\widehat{VaR}_{0.9}^t$ і $\widehat{CVaR}_{0.9}^t$ (Крок 6 Алгоритму 3.3). На рис. 4.10 в якості прикладу наведено змодельовані за методом МЗАКФ оцінки мір динамічних ризиків ($\widehat{VaR}_{0.9}^t_{_SACF}$ і $\widehat{CVaR}_{0.9}^t_{_SACF}$), де для оцінки мір статичних ризиків використані явні формули в припущенні нормального розподілу (перші 843 значень).

Як і раніше, аналіз якості отриманих оцінок для $\widehat{VaR}_{0.9}^t$ проводиться з використанням тестів Купеця (р-значення статистики $LRpof$) і Крістофферсена (р-значення статистик $LRind$, $LRcc$). Рівень значущості критерія в даному випадку дорівнює 0.1.

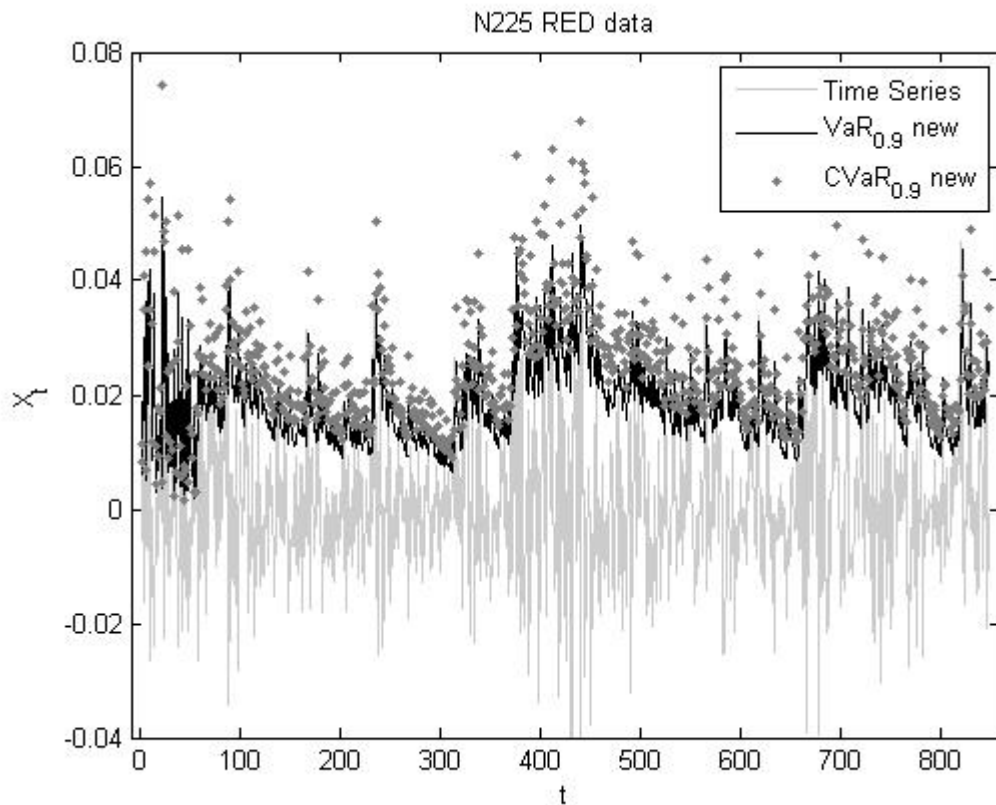


Рис. 4.10. Змодельовані і спрогнозовані (останні 5 значень) оцінки мір динамічних ризиків, отримані за допомогою МЗАКФ

Для аналізу якості оцінок $\widehat{CVaR}_{0.9}^t$ використовується V-тест. Результати аналізу оцінок мір динамічних з використанням МЗАКФ наведені в таблиці 4.15, з використанням стандартного методу - в таблиці 4.16.

Таблиця 4.15

Результати аналізу оцінок мір динамічних ризиків, отриманих за МЗАКФ

Метод/ Оцінка	$LRpof_{SACF}$	$LRind_{SACF}$	$LRcc_{SACF}$	V_{1SACF}	V_{2SACF}	V_{SACF}
<i>hist</i>	0.1289	0.5949	0.6058	-0.0002	-0.0233	0.0118
<i>pd</i>	0.7968	0.6467	0.7536	0.0019	-0.0189	0.0110
<i>GEVq</i>	0.3477	0.3359	0.6088	0.0012	-0.0228	0.0120
<i>GPDq</i>	0.1986	0.4498	0.6688	0.0013	-0.0230	0.0122
<i>POTem</i>	0.0253	0.2610	0.0206	0.0011	-0.0249	0.0130

Таблиця 4.16

Результати аналізу оцінок мір динамічних ризиків, отриманих стандартним методом

Метод/ Оцінка	$LRpof_{st}$	$LRind_{st}$	$LRcc_{st}$	V_{1st}	V_{2st}	V_{st}
<i>hist</i>	0.0349	0.2980	0.1049	0.0005	-0.0212	0.0109
<i>pd</i>	0.6113	0.5060	0.5434	0.0007	-0.0200	0.0104
<i>GEVq</i>	0.4775	0.4273	0.2783	0.0005	-0.0220	0.0113
<i>GPDq</i>	0.4775	0.4273	0.2783	0.0001	-0.0227	0.0114
<i>POTem</i>	0.0330	0.6259	0.0030	0.0011	-0.0177	0.0094

Аналіз результатів показує, що найкращі оцінки $\widehat{VaR}_{0.9}^t$ для обох методів (р-значення статистик істотно більше за 0.1) отримані при використанні методу *pd*, тобто в припущенні, що залишки моделі мають нормальний розподіл. Це узгоджується з результатами загального аналізу даних (табл. 4.3) і підтверджується результатами тесту Харке-Бера, проведеного для $\{Z_t\}$ ($5.624 < 5.649$ і $4.38 < 5.649$ для МЗАКФ і стандартного методу відповідно). При цьому, оцінки, отримані за методом *POTem* не проходять тест якості як для МЗАКФ, так і для стандартного методу. Однак, популярний в застосуванні метод історичного моделювання (оцінки *hist*) для МЗАКФ, на відміну від стандартного, може бути використаний. Крім того, р-значення всіх статистик для МЗАКФ перевищують значення, отримані при використанні стандартного методу. V-тест якості $\widehat{CVaR}_{0.9}^t$ - оцінок показав хорошу якість отриманих оцінок в застосуванні обох методів. Побудована за МЗАКФ модель використовується для отримання прогнозних оцінок мір ризиків для часового ряду. Процедура прогнозування виконується на вікні, що дорівнює половині генеральної вибірки (843 значення). Прогноз будується на $P=5$ значень. Таким чином, приймається, що параметри моделі

залишаються адекватними на період не менше 5 днів. Останні 5 значень на рис. 4.10 - спрогнозовані оцінки мір динамічних ризиків, отримані по половині вибірки.

Кроки 2-6 Алгоритму 3.3 повторюються 168 разів, кожного разу додаються нові 5 значень (вікно з накопиченням). Мінімальні H_{\min} , максимальні H_{\max} і середні H_{mean} значення параметра Херста, отримані на розглянутих вікнах, представлені в таблиці 4.17.

Таблиця 4.17

Значення оцінок параметра Херста

Н/ Метод	абс. значень	вибіркова дисперсія	залишків регресії	Періодо- грам	норм.роз- маху	Опти- мізація
H_{\min}	0.7262	0.6872	0.6241	0.6777	0.7044	0.7199
H_{\max}	0.7837	0.7872	0.7246	0.8854	0.7680	0.7438
H_{mean}	0.7546	0.7445	0.6758	0.7926	0.7356	0.7276

Як видно з таблиці 4.17, значення параметра Херста підтверджують припущення про сильну залежність на всіх вікнах (всі значення більше 0.5). Мінімальний розкид значень (близько 7%) свідчить про стабільність.

Результати прогнозування дисперсії, отримані як з використанням МЗАКФ (New method), так і стандартним методом (Standard method) представлені на рис.4.11.

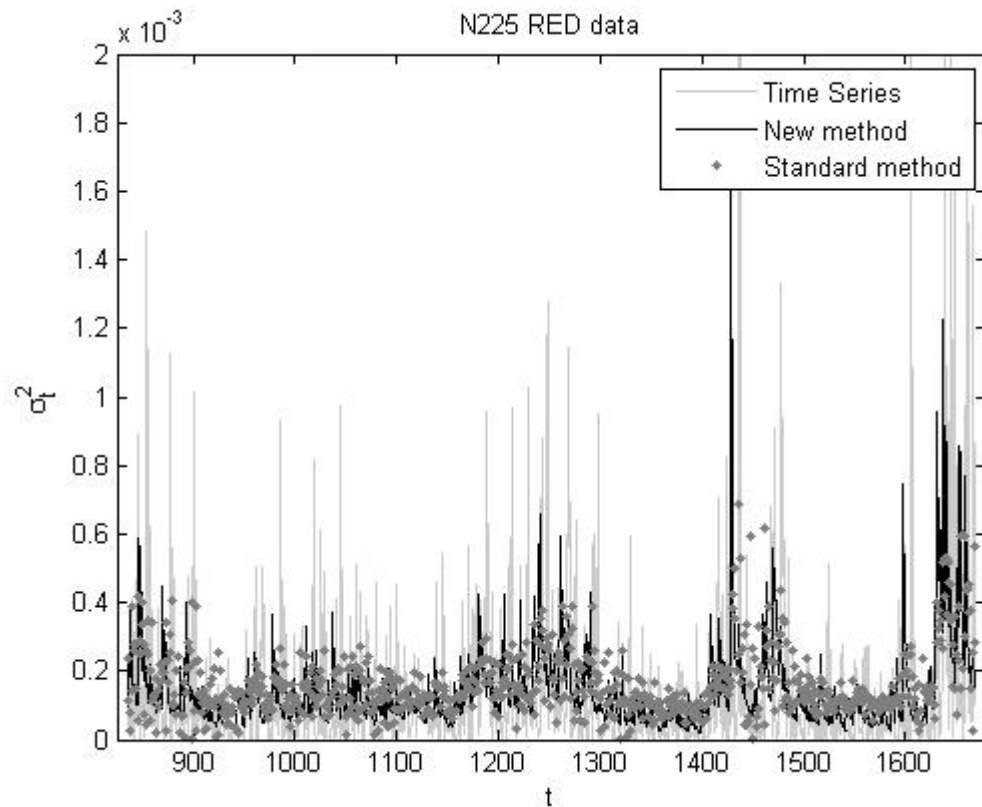


Рис. 4.11. Значення дисперсії для вихідних даних і прогнозні оцінки на 168 вікнах, отримані з використанням МЗАКФ і стандартного методу

Візуальне порівняння отриманих прогнозних значень з реальними показує, що запропонована методика прогнозування дисперсії (Алгоритм 3.2) якісніше описує динамічну поведінку вихідного ряду квадратів, ніж стандартна. Екстремальні значення, отримані за запропонованим методом на основі моделі FIGARCH з використанням оптимізаційної процедури, істотно ближче до реальних. Запропонований метод демонструє також менше запізнення у визначенні екстремальних викидів. Це пояснюється прогнозуванням АКФ з врахуванням сильної залежності. Слід також зазначити, що використання оптимізаційної процедури дозволило істотно підвищити стійкість прогнозу. Мінімальні (min), максимальні (max) і середні (mean) значення мір статичних ризиків на вікнах приведені в таблиці 4.18 для МЗАКФ і таблиці 4.19 для стандартного методу.

Таблиця 4.18

Значення оцінок мір статичних ризиків на різних вікнах (МЗАКФ)

Міра /Метод	<i>hist</i>	<i>pd</i>	<i>GEVq</i>	<i>GPDq</i>	<i>POTem</i>
$\widehat{VaR}_{0.9}(Z)_{_SACF \min}$	1.4121	1.5115	1.4465	1.4811	1.2280
$\widehat{VaR}_{0.9}(Z)_{_SACF \max}$	1.4645	1.5849	1.5325	1.5490	1.7623
$\widehat{VaR}_{0.9}(Z)_{_SACF \text{ mean}}$	1.4379	1.5414	1.4898	1.5135	1.5103
$\widehat{CVaR}_{0.9}(Z)_{_SACF \min}$	2.2466	1.5414	2.2278	2.2607	2.1501
$\widehat{CVaR}_{0.9}(Z)_{_SACF \max}$	2.4645	2.1536	2.4217	2.4364	2.6978
$\widehat{CVaR}_{0.9}(Z)_{_SACF \text{ mean}}$	2.3254	2.1038	2.3013	2.3298	2.4001

Таблиця 4.19

Значення оцінок мір статичних ризиків на різних вікнах (стандартний метод)

Міра /Метод	<i>hist</i>	<i>pd</i>	<i>GEVq</i>	<i>GPDq</i>	<i>POTem</i>
$\widehat{VaR}_{0.9}(Z)_{_st \min}$	1.2462	1.2927	1.2541	1.2717	1.1921
$\widehat{VaR}_{0.9}(Z)_{_st \max}$	1.4305	2.3181	1.4411	1.4011	1.5898
$\widehat{VaR}_{0.9}(Z)_{_st \text{ mean}}$	1.3125	1.4398	1.3241	1.3372	1.3706
$\widehat{CVaR}_{0.9}(Z)_{_st \min}$	1.9061	1.7723	1.9038	1.9390	1.8842
$\widehat{CVaR}_{0.9}(Z)_{_st \max}$	2.3166	3.1949	2.3825	2.4033	2.4764
$\widehat{CVaR}_{0.9}(Z)_{_st \text{ mean}}$	2.0032	1.9729	2.0206	2.0479	2.0647

Таблиці 4.18 і 4.19 можуть бути використані для порівняння якості моделювання мір ризиків стандартним методом і МЗАКФ. Розкид значень (max-min) для нового методу менше ніж розкид значень для стандартного методу, що пояснюється неявним використанням процедури згладжування АКФ при побудові моделі і як результат, отриманням більш стабільної функції розподілу.

Отримані результати використовуються для побудови часових рядів прогнозних оцінок мір динамічних ризиків. На рис. 4.12 наведено приклади прогнозних оцінок $\widehat{VaR}_{0.9}^t$ і $\widehat{CVaR}_{0.9}^t$, отриманих за МЗАКФ, де для оцінювання мір статичних ризиків застосовується метод pd .

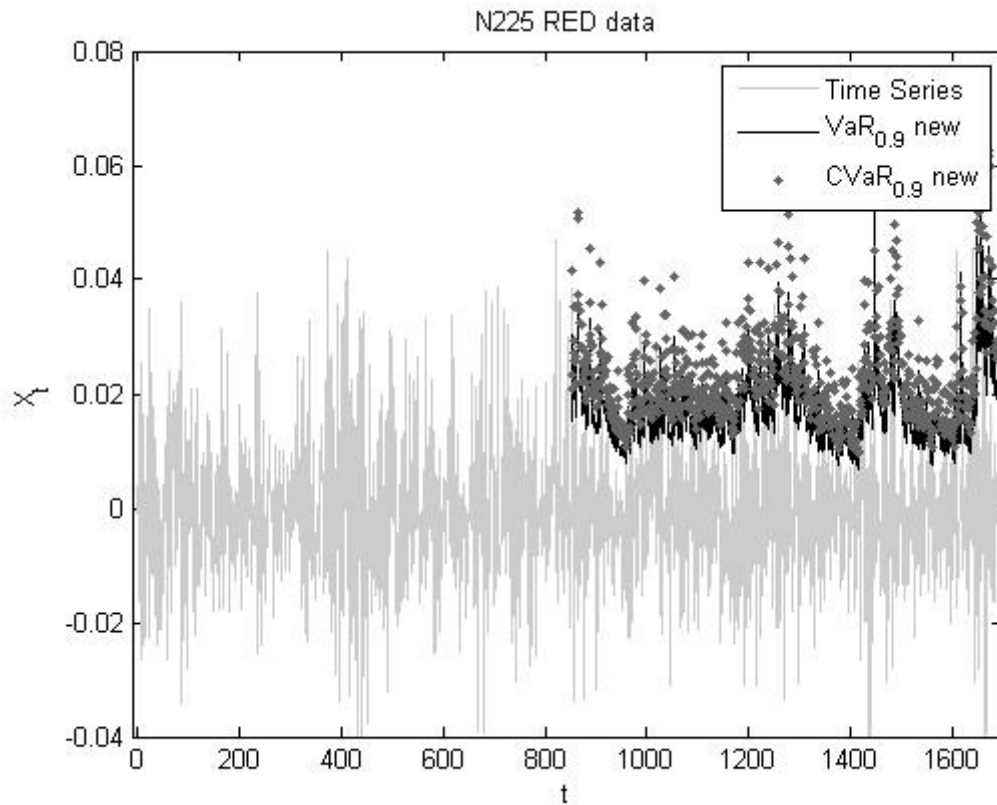


Рис. 4.12. Прогнозні значення мір динамічних ризиків на 168 вікнах, отриманих МЗАКФ з використанням методу pd

Похибки прогнозування $\widehat{VaR}_{0.9}^t$ і $\widehat{CVaR}_{0.9}^t$ для різних методів оцінювання мір статичних ризиків наведені в таблиці 4.20 для оцінок, отриманих за МЗАКФ, та таблиці 4.21 для оцінок, отриманих за стандартною методикою.

Таблиця 4.20

Похибки прогнозних оцінок мір динамічних ризиків (МЗАКФ)

Метод/ Оцінка	$\widehat{VaR}_{0.9_SACF}^t$			$\widehat{CVaR}_{0.9_SACF}^t$		
	ME ($\times 10^{-4}$)	MAE ($\times 10^{-3}$)	MSE ($\times 10^{-5}$)	ME ($\times 10^{-3}$)	MAE ($\times 10^{-3}$)	MSE ($\times 10^{-4}$)
<i>hist</i>	4	4.3	4	1.83	6.96	1.0
<i>pd</i>	5	4.4	4	1.03	6.30	0.8
<i>GEVq</i>	8	4.7	4	2.04	6.35	1.0
<i>GPDq</i>	6	4.6	4	1.90	6.92	1.0
<i>POTem</i>	30	5.1	6	4.24	7.78	1.5

Таблиця 4.21

Похибки прогнозних оцінок мір динамічних ризиків (стандартний метод)

Метод/ Оцінка	$\widehat{VaR}_{0.9_st}^t$			$\widehat{CVaR}_{0.9_st}^t$		
	ME ($\times 10^{-4}$)	MAE ($\times 10^{-3}$)	MSE ($\times 10^{-5}$)	ME ($\times 10^{-3}$)	MAE ($\times 10^{-3}$)	MSE ($\times 10^{-4}$)
<i>hist</i>	-10.0	4.4	3	-9.48	10.25	1.2
<i>pd</i>	-13.0	4.5	5	-6.42	7.93	0.9
<i>GEVq</i>	-11.4	4.8	3	-8.87	9.73	1.1
<i>GPDq</i>	-13.3	4.5	3	-9.19	9.99	1.2
<i>POTem</i>	14.6	4.5	5	-7.27	8.97	1.6

Як випливає з таблиць 4.20 і 4.21, похибки прогнозів, побудованих за МЗАКФ, в основному менше похибок прогнозів, побудованих за стандартним методом. Це вказує на переваги запропонованого в роботі

методу в порівнянні зі стандартним. Крім того, як видно з таблиці 4.20, похибки прогнозів мір ризиків, оцінених з використанням методів *hist* і *pd*, менше ніж у інших методів. Це ще раз підтверджує прийняту раніше гіпотезу про нормальний розподіл даних. Варто зауважити, що якщо метод *pd* безпосередньо використовує припущення про нормальність, то *hist* метод в силу центральної граничної теореми і досить великих обсягів вибірки теж прямує до нормальності.

Якість побудованих прогнозних оцінок $\widehat{VaR}_{0.9}^t$ було проаналізовано за допомогою статистики PoE, описаної в 2.3.5.3. Значення PoE, знайдені за вихідними даними (*real*) і результатами прогнозування, отриманими за запропонованим МЗАКФ (*SACF*) і стандартним методом (*st meth*), наведено в таблиці 4.22. Отримані значення порівнювалися з $1-\alpha=0.1$. Результати свідчать про високу якість отриманих за новим методом прогнозних оцінок $\widehat{VaR}_{0.9}^t$.

Таблиця 4.22

Значення статистики PoE для оцінок $\widehat{VaR}_{0.9}^t$

Метод/Метод	<i>hist</i>	<i>pd</i>	<i>GEVq</i>	<i>GPDq</i>	<i>POTem</i>
<i>SACF</i>	0,1018	0,1062	0,1102	0,1114	0,1102
<i>st meth</i>	0,0838	0,1134	0,0828	0,0886	0,0858
<i>real</i>	0,1102	0,1034	0,1162	0,1198	0,0898

Таблиця 4.22 може бути використана для порівняння методів, на основі яких побудовані прогнози, шляхом порівняння α для прогнозних значень мір ризику і для реальних ризиків. Стандартний метод, який базується на *pd*, демонструє найкращі результати. У той же час, для МЗАКФ кращим є використання методу *hist*. Як випливає з таблиці 4.22, відхилення α для МЗАКФ істотно менше відхилення для стандартного методу.

4.6. Апробація системного підходу на часових рядах різної волатильності

У даному підрозділі проведено аналіз ефективності застосування розробленого системного підходу для отримання прогнозних оцінок VaR і CVaR для часових рядів різної волатильності [144].

В якості даних розглядається часовий ряд NDX_1 (2575 значень) логарифмічної дохідності на денній основі індексу Nasdaq-100 (індекс NDX) за період 08.02.2005-11.02.2015, який представляє динаміку акцій найбільших компаній поза фінансовим сектором, що входять в списки фондової біржі Nasdaq Stock Market. Для порівняння результатів прогнозу крім ряду NDX_1 , що відрізняється досить сильною волатильністю, були розглянуті ще два часових ряду. Ряд NDX_2 (2275 значень) був отриманий з ряду NDX_1 шляхом видалення значень за часовий інтервал 13.05.2008 - 22.07.2009, що характеризується високою нестабільністю фінансового ринку, і ряд NDX_3 (1975 значень), отриманий з ряду NDX_2 видаленням волатильного фрагмента за період 22.02.2011 - 01.05.2012.

На першому етапі системного підходу відбувається аналіз даних і вибір методу прогнозування мір динамічних ризиків. Проведений стандартний статистичний аналіз даних підтверджує, що ряди, які розглядаються, є волатильними з різною волатильністю: $\sigma_{NDX_1} = 0.43$, $\sigma_{NDX_2} = 0.32$, $\sigma_{NDX_3} = 0.25$. Значення коефіцієнтів асиметрії і куртозиса для всіх часових рядів та для часових рядів їх квадратів свідчать, що розподіли мають товсті хвости. Як і раніше, для побудови прогнозу значення часового ряду розбиваються на дві частини: модельну "in-sample" і перевірочну "out-of-sample". Розмір першого "in-sample" дорівнює половині вибірки. Будуються 5-ти крокові прогнози ($P=5$), вікно з накопиченням. Для побудови прогнозу мір ризиків для ряду NDX_1 розглядається 256 вікон, для ряду NDX_2 226, для

ряду NDX_3 196 вікон відповідно. Часові ряди квадратів аналізуються на властивість сильної залежності. Для оцінювання параметра Херста використовуються ті ж самі методи, що використовувалися в 4.5 для оцінювання параметра Херста ряду $N225$. У таблиці 4.23 наведені мінімальне H_{\min} , максимальне H_{\max} і середнє H_{mean} значення по вікнах, отримане за допомогою кожного методу.

Таблиця 4.23

Мінімальне, максимальне і середнє значення параметра Херста, отримані по всіх вікнах

Метод/ оцінка	NDX_1			NDX_2			NDX_3		
	H_{\min}	H_{\max}	H_{mean}	H_{\min}	H_{\max}	H_{mean}	H_{\min}	H_{\max}	H_{mean}
абс. значень	0.924	0.948	0.938	0,774	0.875	0.844	0.766	0.833	0.799
вибіркова дисперсія	0.905	0.931	0.880	0.759	0.784	0.601	0.726	0.792	0.771
залишків регресії	0.937	1.008	0.827	0.538	0.802	0.741	0.648	0.758	0.701
періодогр	1.012	1.068	1.038	0.723	0.885	0.800	0.801	0.915	0.854
норм.роз.	0.782	0.863	0.831	0.729	0.825	0.781	0.719	0.769	0.742
оптимізац	0,772	0,779	0,775	0,726	0,783	0,763	0,726	0,755	0,732

Результати свідчать, що різні методи визначають значення параметра зі значним розкидом. Однак, всі вони однозначно визначають наявність властивості сильної залежності у розглянутих часових рядах квадратів. Зазначений розкид значень параметра Херста робить неефективним застосування стандартних методів моделювання мір динамічних ризиків для

рядів з сильною залежністю [9]. Таким чином, є доцільним використання МЗАКФ.

На другому етапі відбувається побудова прогнозу мір VaR і CVaR з використанням МЗАКФ (Алгоритм 3.3). Довірчий рівень для мір ризику прийнятий $\alpha = 0.9$. Використовуючи Алгоритм 3.1, здійснюється побудова моделі для АКФ. Уточнене по оптимізаційній процедурі значення параметра Херста \hat{H}_{opt} (таблиця 4.23), показує, що застосування оптимізаційної процедури призводить до набагато більш стійкого значення параметра. Таким чином, досягається одна з головних цілей розробленої методики - модель АКФ є більш стійкою, що дозволяє отримати більш якісний прогноз. Моделювання і прогнозування дисперсії часового ряду здійснюється на основі моделі FIGARCH з використанням оптимізаційної процедури - Алгоритм 3.2. Визначається порядок редукування $K = 72$ і, розв'язавши редуковану систему (3.11), знаходяться оцінки коефіцієнтів автокореляції. З використанням інформаційних критеріїв Акаїке і Хеннена - Куїна, визначається порядок авторегресії $M = 55$. Результати критерію відношення дисперсій (1.49 для ряду NDX_1 , 1.09 для ряду NDX_2 , 0.79 для ряду NDX_3) менші за 1.96, що підтверджує коректність побудованої моделі для отримання оцінок $\hat{\sigma}_t^2$ для всіх трьох часових рядів.

Отримані оцінки $\hat{\sigma}_t^2$ використовуються для знаходження реалізацій випадкової величини Z_t : $\hat{Z}_t = X_t / \hat{\sigma}_t$. Перевірка приналежності Z_t до класу ііd здійснюється критерієм відношення дисперсій. Тест Харке-Бера свідчить, що розподіл $\{Z_t\}$ для всіх трьох рядів мають відносно товсті хвости.

Відповідно до класифікаційних схем, наведених на рис 3.4 і рис. 3.5, вибираються наступні методи для знаходження оцінок $\widehat{VaR}_{0.9}(Z)$, $\widehat{CVaR}_{0.9}(Z)$: метод історичного моделювання (оцінка *hist*), застосування явних формул в припущенні нормального розподілу з оцінками параметрів,

отриманих за ММП (оцінка pd), використання явних формул для функції GEV , параметри якої були оцінені по ММП (оцінка $GEVq$), застосування методу Монте-Карло для функції GPD (оцінка $GPDmc$), POT емпіричний - метод (оцінка $POTem$). Мінімальне, максимальне і середнє значення по вікнах оцінок мір статичних ризиків для $\widehat{VaR}_{0.9}(Z)$ приведені в таблиці 4.24 і для $\widehat{CVaR}_{0.9}(Z)$ в таблиці 4.25.

Таблиця 4.24

Мінімальне, максимальне і середнє значення прогнозних оцінок $\widehat{VaR}_{0.9}(Z)$,
отриманих по всіх вікнах

Метод/ $\widehat{VaR}_{0.9}(Z)$	NDX_1			NDX_2			NDX_3		
	min	max	mean	min	max	mean	min	max	mean
<i>hist</i>	1.657	1.627	1.743	1.603	1.541	1.754	1.546	1.522	1.613
<i>pd</i>	1.658	1.634	1.709	1.623	1.582	1.740	1.580	1.564	1.615
<i>GEVq</i>	1.515	1.484	1.563	1.479	1.410	1.570	1.445	1.398	1.492
<i>GPDmc</i>	1.570	1.543	1.616	1.545	1.410	1.647	1.497	1.475	1.552
<i>POTem</i>	2.077	1.807	2.370	1.916	1.524	2.187	1.752	1.443	2.076

Таблиця 4.25

Мінімальне, максимальне і середнє значення прогнозних оцінок $\widehat{CVaR}_{0.9}(Z)$,
отриманих по всіх вікнах

Метод/ $\widehat{CVaR}_{0.9}(Z)$	NDX_1			NDX_2			NDX_3		
	min	max	mean	min	max	mean	min	max	mean
<i>hist</i>	2.512	2.465	2.603	2.462	2.408	2.666	2.414	2.366	2.508
<i>pd</i>	2.267	2.238	2.233	2.217	2.162	2.373	2.381	2.138	2.205
<i>GEVq</i>	2.503	2.447	2.611	1.479	1.410	1.570	2.381	2.318	2.470
<i>GPDmc</i>	2.523	2.486	2.613	1.545	1.410	1.647	2.419	2.386	2.483
<i>POTem</i>	2.942	2.634	3.246	1.916	1.524	2.187	2.621	2.280	3.000

Отримані результати використовуються для знаходження часових рядів прогнозних оцінок мір динамічних ризиків. Значення похибок наведені в таблицях 4.26 (для $VaR_{0.9}^t$) і 4.27 (для $CVaR_{0.9}^t$).

Таблиця 4.26

Похибки прогнозних оцінок $VaR_{0.9}^t$

Метод/ Оцінка	NDX_1			NDX_2			NDX_3		
	ME $\times 10^{-3}$	MAE $\times 10^{-3}$	RMSE $\times 10^{-5}$	ME $\times 10^{-3}$	MAE $\times 10^{-3}$	RMSE $\times 10^{-5}$	ME $\times 10^{-3}$	MAE $\times 10^{-3}$	RMSE $\times 10^{-5}$
<i>hist</i>	-1.6	6.0	6	0.4	5.1	5	-0.3	3.6	2
<i>pd</i>	-3.0	6.7	7	0.1	5.2	5	-0.5	4.0	3
<i>GEVq</i>	-3.1	6.3	6	-0.2	4.8	4	-0.8	3.8	2
<i>GPDmc</i>	-1.7	5.7	5	-0.3	4.9	5	-0.5	3.8	3
<i>POTem</i>	0.2	6.9	9	2.4	5.8	8	1.9	4.5	4

Таблиця 4.27

Похибки прогнозних оцінок $CVaR_{0.9}^t$

Метод/ Оцінка	NDX_1			NDX_2			NDX_3		
	ME $\times 10^{-3}$	MAE $\times 10^{-3}$	MSE $\times 10^{-5}$	ME $\times 10^{-3}$	MAE $\times 10^{-3}$	MSE $\times 10^{-5}$	ME $\times 10^{-3}$	MAE $\times 10^{-3}$	MSE $\times 10^{-5}$
<i>hist</i>	-4.5	10.1	16	0.3	7.9	13	-0.8	6.3	6.7
<i>pd</i>	-4.3	9.2	13	0.1	7.1	10	-0.8	5.6	5.2
<i>GEVq</i>	-3.6	9.7	15	0.9	7.8	13	-0.06	5.9	6.3
<i>GPDmc</i>	-4.3	10.0	16	0.6	7.9	13	-0.4	6.1	6.6
<i>POTem</i>	-2.8	10.9	20	2.5	8.4	15	1.4	6.6	9.0

Як видно, побудовані прогнози є стійкими і достовірними. Тести якості прогнозів показують коректність оцінок, побудованих усіма методами, з деякою перевагою *GPDmc* для NDX_1 , *GEVq* для NDX_2 и *hist* для NDX_3 , що пов'язано з різною волатильністю і особливостями функцій розподілів. Прогнози мір динамічних ризиків, побудовані із застосуванням вказаних методів для розглянутих часових рядів, зображені на рис. 4.13 - 4.15.

Аналіз рис. 4.13 - 4.15 показує, що отримані прогнозні значення мір ризиків якісно відстежують динаміку часових рядів, стрибки мір ризиків повторюють викиди з мінімальною затримкою. CVaR, як інтегральна характеристика, згладжує стрибки VaR. Оскільки міра ризику VaR, взагалі кажучи, не є опуклою, то збільшення волатильності даних не призводить автоматично до її зростання, що підтверджено результатами наведеними в таблиці 4.26. У той же час, CVaR - опукла функція і, як впливає з таблиці 4.27, зі збільшенням волатильності даних її значення зростає, що узгоджується з результатами тестів якості прогнозу $CVaR'_{0.9}$.

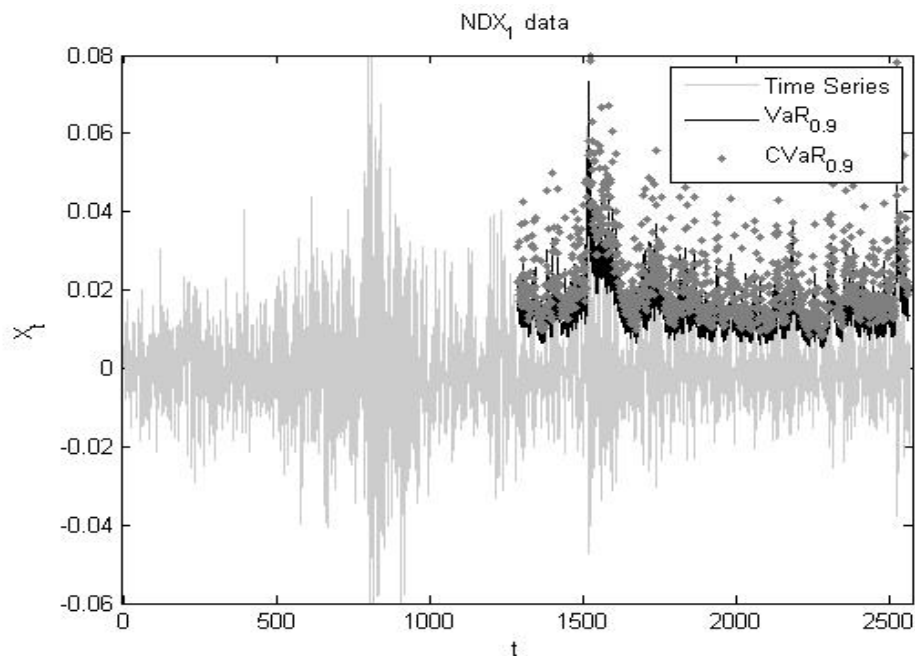


Рис. 4.13. Прогнозні значення мір динамічних ризиків для ряду NDX_1 , отримані з використанням методу *GPDmc*

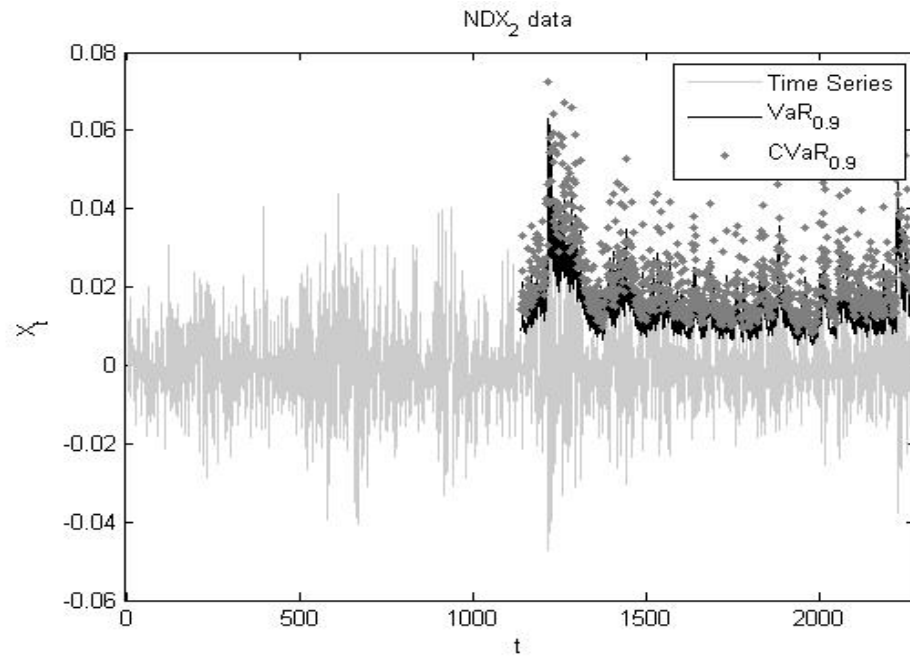


Рис. 4.14. Прогнозні значення мір динамічних ризиків для ряду NDX_2 , отримані з використанням методу $GEVq$

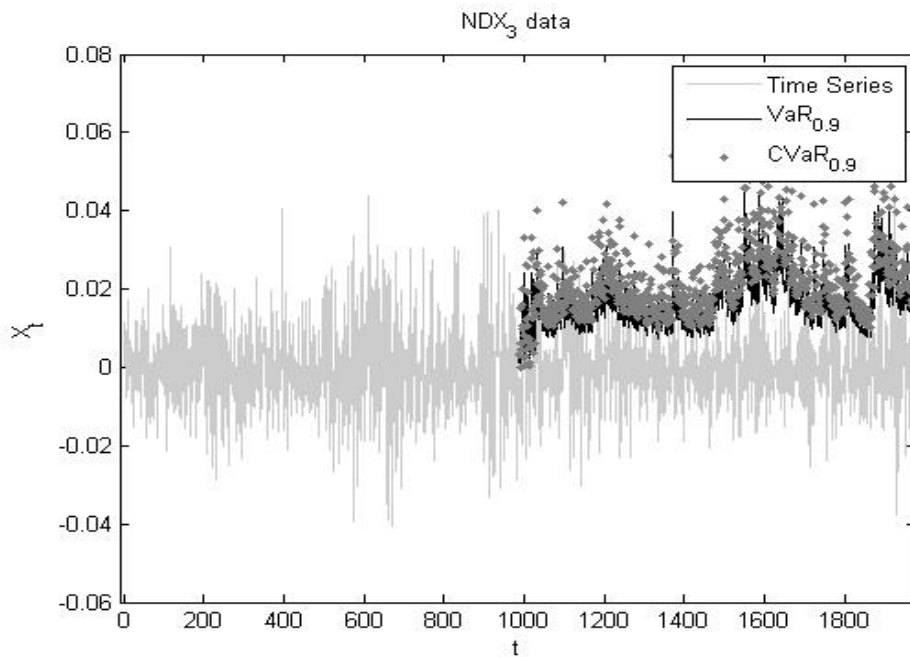


Рис. 4.15. Прогнозні значення мір динамічних ризиків для ряду NDX_3 , отримані з використанням методу $hist$

Для аналізу отриманих прогнозних значень VaR були знайдені значення Probability of Exceedance (PoE), наведені в таблиці 4.28.

Таблиця 4.28

Значення PoE для реальних і прогнозних значень $VaR'_{0.9}$

Метод/Статистика	NDX_1		NDX_2		NDX_3	
	<i>real</i>	<i>pred</i>	<i>real</i>	<i>pred</i>	<i>real</i>	<i>pred</i>
<i>hist</i>	0.061	0.091	0.087	0.096	0.079	0.094
<i>pd</i>	0.051	0.090	0.080	0.093	0.071	0.090
<i>GEVq</i>	0.052	0.104	0.087	0.105	0.082	0.103
<i>GPDmc</i>	0.059	0.099	0.089	0.101	0.080	0.100
<i>POTem</i>	0.066	0.063	0.078	0.072	0.079	0.081

Значення *real* отримані з використанням реальних даних. Близькість отриманих значень до значення $1-\alpha=0.1$ демонструє можливість застосування розглянутих методів для визначення VaR динамічних ризиків. Як і слід було очікувати, найгірший результат був отриманий для ряду NDX_1 , що відрізняється великою волатильністю. Значення *pred* отримані на побудованих прогнозних значеннях і, як видно з таблиці, якісніше описують динамічну поведінку VaR. Найгірші результати продемонстрував метод *POTem*, що відповідає результатам, представленим в таблиці 4.14.

Таблиця 4.29 містить результати безумовного тесту Купеця (LR_{pof}), тесту на незалежність Крістофферсена (LR_{ind}) і значення комбінованої статистики LR_{sc} , що аналізують якість отриманих VaR - оцінок. У таблиці представлені р-значення статистик. Рівень значущості критерію вибраний 0.05. Як видно, саму низьку якість мають оцінки, отримані по методу *POTem* *POTem*. Недостатньо високу якість продемонстрував і метод *pd*, що можна пояснити наявністю товстих хвостів у функцій щільності розподілу рядів.

Таблиця 4.29

Результати тестів Купеця і Крістофферсена для $VaR'_{0,9}$

Метод/ Оцінка	NDX_1			NDX_2			NDX_3		
	$LRpof$	$LRind$	$LRcc$	$LRpof$	$LRind$	$LRcc$	$LRpof$	$LRind$	$LRcc$
<i>hist</i>	0.257	0.013	0.054	0.618	0.047	0.046	0.519	0.057	0.046
<i>pd</i>	0.119	0.035	0.045	0.423	0.024	0.056	0.279	0.032	0.055
<i>GEVq</i>	0.643	0.051	0.071	0.555	0.061	0.144	0.750	0.054	0.053
<i>GPDmc</i>	0.126	0.080	0.060	0.921	0.0159	0.062	1.000	0.066	0.062
<i>POTem</i>	0.001	0.020	0.000	0.001	0.395	0.003	0.037	0.031	0.011

Для аналізу якості прогнозу CVaR використаний V-тест зі статистиками V_1 , V_2 , V (таблиця 4.30). Як випливає з наведених результатів, методи прогнозування обрані вірно і прогнози є якісними

Таблиця 4.30

Результати V –теста якості прогнозних оцінок $CVaR'_{0,9}$

Метод/ оцінка	NDX_1			NDX_2			NDX_3		
	V_1 $\times 10^{-3}$	V_2 $\times 10^{-3}$	V $\times 10^{-3}$	V_1 $\times 10^{-3}$	V_2 $\times 10^{-3}$	V $\times 10^{-3}$	V_1 $\times 10^{-3}$	V_2 $\times 10^{-3}$	V $\times 10^{-3}$
<i>hist1</i>	0.04	-18.18	9.11	-0.24	-17.92	9.08	0.15	-16.61	8.38
<i>pd1</i>	1.90	-15.19	8.54	1.85	-14.82	8.34	2.31	-13.72	8.02
<i>GEVq</i>	-0.95	-18.10	9.53	-0.77	-17.58	9.17	-0.28	-16.34	8.31
<i>GPDmc</i>	-8.00	-18.30	9.56	-0.75	-18.11	9.43	-0.31	-16.67	8.41
<i>POTem</i>	-0.51	-22.83	11.68	-0.52	-21.48	10.99	-0.20	-18.66	9.43

Висновки до розділу 4

Даний розділ роботи присвячений апробації запропонованих у роботі алгоритмів, що є складовими системного підходу до отримання прогнозних оцінок мір динамічних ризиків.

Застосування і ефективність запропонованого алгоритму вибору методу оцінювання VaR і CVaR для динамічних ризиків ілюструються оцінюванням мір ризиків для штучно згенерованого ряду і двох часових рядів логарифмічної дохідності на денній основі фондового індексу Tokyo Stock Exchange і композитного індексу CSI 300 Index ETF (CNY). Показано, що запропонована схема вибору методу оцінювання дозволяє однозначно і ефективно вибирати відповідні статистичним характеристикам рядів методи оцінювання VaR і CVaR для динамічних ризиків, що підтверджується аналізом залишків результуючої моделі. Запропонована схема може бути розширена або уточнена з урахуванням специфіки аналізованих даних. У запропонованому прикладі система тестів обрана на основі узагальнення відомих досліджень властивостей волатильних фінансових часових рядів.

Для підтвердження ефективності запропонованої схеми вибору методу оцінювання мір статичних ризиків VaR і CVaR було розглянуто два штучно змодельованих ряда - відповідно до закону нормального розподілу і за розподілом Стюдента. Для отримання оцінок мір статичних ризиків було застосовано 10 методів, що представляють різні підходи в оцінюванні статичних ризиків. Отримані оцінки підтвердили коректність наведених у роботі методів і зручність класифікаційних схем для їх вибору.

Апробація запропонованих у роботі нових методу моделювання автокореляційної функції на основі оптимізаційної процедури і моделювання дисперсії на основі моделі FIGARCH була здійснена на штучно змодельованому за FIGARCH моделлю часовому ряді із відомим значенням параметра Херста і часовому ряді логарифмічної дохідності індексу РТС. Проведений аналіз отриманих по новому методу оцінок АКФ підтвердив

здатність запропонованій моделі більш точно описати поведінку АКФ для великих лагів.

Для аналізу розробленого у роботі методу прогнозування дисперсії на основі моделі FIGARCH було застосовано стандартний метод прогнозування на основі моделі авторегресії. Порівняння кількісних оцінок знайдених прогнозів дисперсії за обома методами показують суттєве підвищення ефективності запропонованого методу прогнозування в порівнянні з широкоживаним методом. Зокрема, окрім зменшення похибки прогнозу, запропонований метод дозволяє отримати прогноз, який значно краще відтворює як абсолютні відхилення фактичного часового ряду, так і тенденцію локальних трендів. Новий метод також демонструє значне зменшення затримки при прогнозуванні точок перелому локального тренду.

Для апробації запропонованого методу прогнозування мір динамічних ризиків – МЗАКФ – було отримано прогнозні значення мір ризику для часового ряду японського індексу Nikkei 225 Stock Index (часовий ряд N225). Для порівняння аналогічні оцінки були отримані з використанням стандартної методики. Проведений кількісний і якісний аналізи підтвердили ефективність отриманих за МЗАКФ прогнозних оцінок мір ризиків для часових рядів.

З метою демонстрації можливості і ефективності застосування розробленого системного підходу до задачі прогнозування мір динамічних ризиків для рядів різної волатильності, було розглянуто три часових ряда різної волатильності на основі ряду логарифмічної дохідності на денній основі індекса Nasdaq-100. Проведені розрахунки підтвердили ефективність запропонованого підходу для прогнозування VaR і CVaR для динамічних ризиків. Класифікаційні схеми для статичних і динамічних ризиків дозволили однозначно визначити найкращий метод для прогнозування для кожного з часових рядів, що підтверджено порівнянням прогнозів і реальних даних. Застосування методу моделювання АКФ на основі оптимізаційної процедури призвело до побудови стійкого прогнозу динамічної дисперсії, який якісно

повторює як регулярну поведінку часового ряду, так і викиди. Рівні змін мір динамічних ризиків відповідають різній волатильності часових рядів, але якість прогнозів практично однакова, що підтверджено критеріями якості прогнозів. Таким чином, підтверджена ефективність розробленого підходу для побудови прогнозів мір динамічних ризиків в широкому діапазоні волатильності.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішена проблема розробки системного підходу до моделювання і прогнозування мір динамічних ризиків VaR і CVaR із застосуванням теорії часових рядів. Основні наукові та практичні результати роботи полягають в наступному:

1. Проведено системний аналіз наявних методів оцінювання мір статичних і динамічних ризиків VaR і CVaR. Результати аналізу сформульовані у вигляді класифікаційних схем, що спрощують вибір методу, який найбільше відповідає цілям аналізу і вхідним даним.
2. Розроблено метод моделювання автокореляційної функції на основі оптимізаційної процедури, що дозволяє найкращим чином відобразити поведінку автокореляційної функції для великих значень аргументу. Запропонована модель АКФ дозволяє отримати уточнену оцінку параметра сильної залежності.
3. Розроблено новий метод прогнозування дисперсії на основі моделі FIGARCH з використанням оптимізаційної процедури. Метод включає зведення моделі FIGARCH до авторегресійної моделі нескінченного порядку для квадратів процесу з наступним редукуванням за процедурою, що враховує відому асимптотичну поведінку автокореляційної функції. Коефіцієнти авторегресії знаходяться з використанням запропонованої моделі автокореляційної функції.
4. Розроблено та математично обґрунтовано новий метод згладжування автокореляційної функції (МЗАКФ) для моделювання і прогнозування мір динамічних ризиків VaR і CVaR на основі моделі FIGARCH з використанням оптимізаційної процедури, оформлений у вигляді покрокового алгоритму.

5. На основі результатів, отриманих в даній роботі, створено комплекс програмних модулів, які реалізують методи та алгоритми оцінювання і прогнозування мір статичних і динамічних ризиків VaR і CVaR.
6. Застосовано розроблений системний підхід у вигляді моделей, методів та програмно-обчислювальних комплексів до вирішення практичних задач прогнозування мір динамічних ризиків на прикладах часових рядів, що описують показники індексів різних фондових бірж.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] J. Fan, and Q. Yao, *Nonlinear Time Series: Nonparametric and Parametric Methods*. New York, USA: Springer, 2005..
- [2] R. S. Tsay, *Analysis of Financial Time Series(third edition)*. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc. 2010.
- [3] P. Embrechts, R. Kaufmann, and P. Patie, “Strategic long-term financial risks: single risk factors”, *Computational Optimization and Applications*, 32, pp. 61-90, 2005.
- [4] J. Hull, *Options, Futures, and Other Derivatives. Fifth Edition*. New Jersey, USA: Prentice-Hall, 2003.
- [5] G. Kirchgässner, and J. Wolters, *Introduction to Modern Time Series Analysis*. Berlin: Springer-Verlag, 2007.
- [6] A. Palit, and D. Popovic, *Computational Intelligence in Time Series Forecasting - Theory and Engineering Applications*. London: Springer-Verlag, 2005.
- [7] E. Zivot, and J. Wang, *Modeling Financial Time Series with S-PLUS*. New York, USA: Springer-Verlag, 2003.
- [8] C. W. Granger, “The Typical Spectral Shape of an Economic Variable”, *Econometrica*, vol.34, no.1, pp. 150-161, 1966.
- [9] J. Beran, *Statistics for Long-Memory Processes*. New York, USA: Chapman and Hall, 1994.
- [10] W. Palma. *Long-Memory Time Series: Theory and Methods*. New Jersey, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2007.
- [11] Я. Снеддон, *Преобразование Фурье*, М.: Изд-во иностр. лит., 1955.
- [12] S. L. Marple, *Digital Spectral Analysis with applications*. New Jersey, USA: Prentice-Hall, Inc., 1987.
- [13] Е. Федер, *Фракталы*. М: Мир, 1991.
- [14] M. S. Taqqu, V. Teverovsky, and W. Willinger, “Estimators for long-range dependence: An empirical study”, *Fractals*, pp. 785 -798, 1995.

- [15] P.M. Robinson, "Gaussian semi-parametric estimation of long range dependence", *The Annals of Statistics*, vol.23, no. 5, pp. 1630-1661, 1995.
- [16] J. Gao, *Nonlinear Time Series: Semiparametric and Nonparametric Methods*. London: Chapman & Hall / CRC, 2007.
- [17] V. Teverovsky, and M.S. Taqqu, "Semi-parametric graphical estimation techniques for long-memory data", *Lecture Notes in Statistics*. vol. 115, pp.420-432, 1996.
- [18] P.M. Robinson, "Log-Periodogram Regression of Time Series with Long Range Dependence", *The Annals of Statistics*, vol. 23, no. 3, pp. 1048-1072, 1995.
- [19] G. Chan, and D.S. Poskit, "Periodogram-based estimators of fractal properties ", *The Annals of Statistics*, vol. 23, no. 5, pp. 1684-1711, 1995.
- [20] V. Teverovsky, and M.S. Taqqu, "Testing for long-range dependence in the presence of shifting mean or a slowly declining trend, using a variance-type estimator", *Time Series Analysis*, vol. 18, no.3, pp.279-304, 1997.
- [21] D. Conniffe, and J. Spencer, "Approximating the distribution of the R/S statistic", *The Economic and Social Review*, vol. 31, no. 3, pp.237-248, 2000.
- [22] И.Г. Журбенко, и И.А. Кожевникова, *Стохастическое моделирование процессов*, М: издательство МГУ, 1990.
- [23] О.Г. Зражевський, "Застосування періодограмних оцінок до аналізу автомодельних часових рядів", на *Міжнар. конф. "Сучасна стохастика: теорія і застосування"*, Київ, 2006, с. 32-33.
- [24] A.G. Zrazhevsky, "Statistical methods for determine long-range dependent time series" на *XI міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука*, Київ, 2006, с. 704.
- [25] Б.С. Цыбаков, "Модель телетрафика на основе самоподобного случайного процесса", *Радиотехника*, №5, с. 24-31, 1999.
- [26] M.E. Crovella, and A. Bestavros, "Self Similarity in World Wide Web Traffic: Evidence and Possible Causes", *IEEE/ACM Trans. Network*, vol. 5, no.6, pp. 835-846, 1997.

- [27] J. Deane, C. Smythe, and D.J. Jefferies, “Self-similarity in a deterministic model of data transfer”, *International Journal of Electronics*. vol. 80, no. 5, pp. 677-691, 1996.
- [28] W.E. Leland, M.S. Taqqu, W. Willinger, and D.V. Wilson, “On the Self-similar Nature of Ethernet Traffic (Extended Version)”, *IEEE/ACM Trans. Network*, vol. 2, pp. 1-15, 1994.
- [29] M.S. Taqqu, W. Willinger, R. Sherman, and D.V. Wilson, “Self-similarity through high-variability: statistical analysis of ethernet LAN traffic at the source level”, *IEEE/ACM Trans. Network*, vol. 5, no. 1, pp. 71-86, 1997.
- [30] М.П. Моклячук, и О.Г. Зражевський, “Аналіз та прогнозування автомодельних часових рядів”, in *Insurance and finance: science, practice and education: International summer school*, 2006, pp. 10.
- [31] M.P. Moklyachuk, and O.G. Zrazhevsky, “Long-range dependence of time series for MSFT data of shares and returns”, *Random Operators and Stochastic Equations*, vol. 4, no. 4, pp. 393-403, 2006.
- [32] M.P. Moklyachuk, and A.G. Zrazhevsky, “Time series model selection of the FARIMA class in financial mathematics”, in *Insurance and finance: science, practice and education: International summer school*, Kyiv, 2007, pp. 23.
- [33] Н.Д. Панкратова, та Н.Г. Зражевская, “Модель автокорреляционной функции временного ряда с сильной зависимостью”, *Проблемы управления и информатики*, no.5, с. 102-112, 2015. Англомова версія статті: N. D. Pankratova, and N. G. Zrazhevskaya, “Model of Autocorrelative Function of Time Series with Strong Dependence”, *Journal of Automation and Information Sciences*, vol. 47, no. 10, pp. 1-12, 2015.
- [34] R.F. Engle, “Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflations”, *Econometrica*, no.50, pp. 987–1007, 1982.
- [35] T. Bollerslev, “Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity”, *Journal of Econometrics*, no.31: pp. 307–327, 1986.

- [36] D.B. Nelson, “Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach”, *Econometrica*, no. 59, pp. 347–370, 1991.
- [37] L.R. Glosten, R. Jagannathan, and D.E. Runkle, “On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks”, *Journal of Finance*, vol. 48, no. 5, pp. 1779-1801, 1993.
- [38] Z. Ding, C.W.J. Granger, and R.F. Engle, “A long memory property of stock market returns and a new model”, *Journal of Empirical Finance*, vol.1, no. 1, pp. 83-106, 1993.
- [39] R.T. Baillie, “Long memory processes and Fractional integrated in econometrics”, *Journal of Econometrics*, no.73, pp. 5-59, 1996.
- [40] R.T. Baillie, T. Bollerslev, and H.O. Mikkelsen, “Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity”, *Journal of Econometrics*. no.74, pp. 3-30, 1996.
- [41] T. Bollerslev, and H.O. Mikkelsen, “Modelling and pricing long memory in stock market volatility”, *Journal of Econometrics*.no.73, pp. 151-184, 1996.
- [42] R.T. Baillie, and C. Morana, “Modelling long memory and structural breaks in conditional variances: An adaptive-FIGARCH approach”, *Journal of Economic Dynamics & Control*, vol. 33, no. 8, pp. 1577-1592, 2009.
- [43] B.J. Christensen, “Long memory in stock market volatility and the volatility-in-mean effect: The FIEGARCH-M Model”, *Journal of Empirical Finance*, vol. 17, no. 3, pp.460–470, 2010.
- [44] T. Bollerslev, J.R. Russell, and M. Watson, *Glossary to ARCH (GARCH) Volatility and Time Series Econometrics: Essays in Honour of Robert F. Engle*. Oxford, UK: Oxford University Press, 2009.
- [45] E. Rossi, “Univariate GARCH models: a survey”, *Quantile*, no. 8, pp. 1-67, 2010.
- [46] D. Ruppert, *Statistics and Data analysis for Financial Engineering*, New York, USA: Springer, 2015.
- [47] H. Akaike, “Statistical predictor identification”, *Ann. Inst. Statist. Math.*, vol. 22, pp. 203-217, 1970.

- [48] Y.M. Zhang, and Q.M. Zhu, “Selecting optimal ARMA order by a minimum spectrum distance criterion”, *International Journal of Systems Science*, vol .30, no. 2, pp. 223–237, 1999.
- [49] M. Tayefi, “An Overview of FIGARCH and Related Time Series Models”, *Austrian Journal of Statistics*, vol. 41, no. 3, pp. 175-196, 2012.
- [50] T.V. Ramanathan. C. Francq, and J.M. Zakoian, *GARCH Models Structure, Statistical Inference and Financial Applications*. Hoboken, NewJersey, USA: Wiley, 2, 2010.
- [51] A. Yilmaz, and G. Unal, “Chaos in fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedastic processes Financial Economics”, Graduate Program, Yeditepe University, 2016.
- [52] C.G. Dethé, and D.G. Wakde, “On the prediction of packet process in network traffic using FARIMA time-series model”, *J. Indian Inst. Sci*, vol. 84, pp. 31–39, 2004.
- [53] S. Stoev and M.S. Taqqu, “Simulation methods for Linear fractional stable motion and FARIMA using the fast Fourier transform”, *Fractals*, vol.12, no. 1, pp. 95-121, 2004.
- [54] C. Chorro, D. Guégan, and F. Ielop, “Likelihood-Related Estimation Methods and Non-Gaussian GARCH Processes”, Documents de travail du Centre d’Economie de la Sorbonne 2010.67 - ISSN : 1955-611X. 2010.
- [55] A. Lahiani, and O. Yousfi, “Modèles Garch à la mémoire longue: application aux taux de change tunisiens”, *Euro-Mediterranean Economics and Finance Review*, vol. 3, no. 4, pp. 106-122, 2008.
- [56] A. Banerjee, and S. Sarkar, “Modeling daily volatility of the Indian stock market using intra-day data”, Indian Institute of Management, Calcutta, Working paper WPSNO.588., 2006.
- [57] N. Selmi and N. Hachicha, “Multivariate FIGARCH and long memory process: evidence of oil price markets”, *Management Science: Letters*, no.5, pp. 873 -882, 2015.

- [58] R.T. Baillie, Y.W. Han, and R.J. Myers, “Long Memory and FIGARCH Models for Daily and High Frequency Commodity Prices”, *Working paper*, no.594, 2007.
- [59] C. Chatfield, *Time-Series Forecasting.*, London, UK: Chapman & Hall / CRC, 2000.
- [60] F.J. Magnus, and O-A. E.Fosu, “Modelling and Forecasting Volatility of Returns on the Ghana Stock Exchange using GARCH Models”, *American Journal of Applied Sciences*, vol. 3 , no. 10, pp. 2042–2048, 2006.
- [61] C. Brownlees, R. Engle, and B. Kelly, “A practical guide to volatility forecasting through calm and storm”, *The Journal of Risk*, Vol. 14, pp 3-22, 2012.
- [62] C. Kosapattarapim, Yan-Xia Lin, and McCrae, “Evaluating the volatility forecasting performance of best fitting GARCH models in emerging Asian stock markets”, Center for Statistical and Survey Methodology School of Mathematics and Applied Statistics, University of Wollongong, Wollongong, Australia, NSW 2522., 2011.
- [63] P. Honrao, “Modeling Volatility of Price of Agricultural Products in India: Using Arima-Garch Applications”, *Indian journal of applied research*, vol. 4 no. 9, pp. 125-129, 2014.
- [64] Н.Г. Зражевська, “Метод згладженої автокореляційної функції для прогнозування варіації гетероскедастичних часових рядів”, *Системні дослідження та інформаційні технології*, no.3. с. 97-108, 2015.
- [65] J. Hybel Pedersen, ARMA(1,1)-GARCH(1,1). Estimation and forecast using rugarch 1.2-2. 2015-02-20. [Online]. Available: <http://unstarched.net/wp-content/uploads/2013/06/an-example-in-rugarch.pdf>. Accessed on: June 11, 2013.
- [66] P. Embrechts, H. Furrer, R. Kaufmann, “Different Kinds of Risk”, in *Handbook of Financial Time Series*, Andersen, Davis, Kreiss, and Mikosch, Eds. Berlin/Heidelberg: Springer, 2009, pp. 729-751.
- [67] C.L. Marshall, *Measuring and Managing Operational Risks in Financial Institutions: Tools, Techniques, and other Resources. Wiley Frontiers in Finance*, Singapore: John Wiley & Sons, Inc., 2001.

- [68] A.J. McNeil, R. Frey, and P. Embrechts, *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*, Princeton (NJ), USA: PrincetonUniversityPress, 2005.
- [69] H.M. Markowits, "Portfolio Selection", *Journal of Finance*, vol. 7, no. 1, pp. 71-91, 1952.
- [70] H.M. Markowitz, *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment*. NewYork, USA: Wiley, 1959.
- [71] Risk Metrics. Technical Document, 4-thEdition, J.P.Morgan, December 1996.
- [72] A. Chernobai, F.Fabozzi, and S. Rachev, *Operational Risk: A Guide to Basel II Capital Requirements, Models, and Analysis*. New Jersey, USA: John Wiley & Sons, 2007.
- [73] P. Jorion, *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk* (third edition). New York, USA: McGraw-Hill.19, 2007.
- [74] K. Dowd, *Measuring Market Risk* (second edition). Chichester, UK:John Wiley & Sons, 2005.
- [75] P. Artzner, F. Delbaen, J. M. Eber, and D. Heath, "Coherent measures of risk", *Mathematical Finance*, vol. 9, pp. 203-228, 1999.
- [76] Y. Yamai, and T. Yoshiba, "Comparative analysis of expected shortfall and value-at-risk: Their estimation error, decomposition and optimization", *Monetary and Economic Studies*, vol.20, no. 1, pp. 57–86, 2002.
- [77] M. Zabarankin, and S. Uryasev, *Statistical Decision Problems. Selected Concepts and Portfolio Safeguard Case Studies*, New York, USA: Springer New York, 2014.
- [78] S. Sarykalin, G. Serraino, and S. Uryasev, "VaR vs CVaR in Risk Management and Optimization", *Tutorials in Operations Research*, INFORMS 2008, p.270-293. 2008.
- [79] V. Karadzic, and J. Cerovic, "Market risk of the Western Balkans countries during the global financial crisis", *EconomicAnnals-XXI*, vol. 11-12, pp. 19-24, 2014.

- [80] M. Koksál, B., and M. Orhan, “Market Risk of Developed and Emerging Countries during the Global Financial Crisis”, *Emerging Markets Finance & Trade*, vol. 49, no. 3, pp. 20–34, 2013.
- [81] A.S Araújo, and M.T. Garcia, “Risk contagion in the north-western and southern European stock markets”, *Journal of Economics and Business*,no. 69, pp. 1-34, 2013.
- [82] K. Andriosopoulos, and N. Nomikos, “Risk management in the energy markets and Value-at-Risk modelling: a Hybrid approach”, Working Paper, Cass Business School, 2011.
- [83] S.-M. Yoon, and S.- H. Kang,“VaR Analysis for the Shanghai Stock Market”, *The Macrotheme Review*, vol. 2, no. 6, p 89-95, 2013.
- [84] T. Angelidis, and A. Benos, “Value-at-Risk for Greek Stocks”,*Multinational Finance Journal*, vol. 12, no. 1/2, pp. 67-104, 2008.
- [85] R.T. Rockafellar, and S. P. Uryasev, "Optimization of conditional value-at-risk", *Journal of Risk*, vol. 2, pp. 21-42. 2000.
- [86] V. Chernozhukov, and L. Umantsev.“Conditional value-at-risk: Aspects of modeling and estimation”, *Empirical Economics*, vol.26,pp. 271-292, 2001.
- [87] S. Uryasev, “Conditional value-at-risk: Optimization algorithms and applications”, *Financial Engineering News*,no.14, pp. 1-5, 2000.
- [88] S. Ziković, and R.K. Filer, “Ranking of VaR and ES Models: Performance in Developed and Emerging Markets”, *Finance a úvěr-Czech Journal of Economics and Finance*, vol. 63, no. 4, p.327-359, 2013.
- [89] J. Hong, and L. Guangwu, “Monte Carlo estimation of value-at-risk, conditional value-at-risk and their sensitivities”, *Proceedings of the 2011 Winter Simulation Conference*, pp. 95-107, 2011.
- [90] K. Inui, and M. Kijima, “On the Significance of Expected Shortfall as a Coherent Risk Measure”, *Journal of Banking and Finance*, vol. 29, no.4,pp. 853-864, 2005.
- [91] R.T. Rockafellar, and S.P. Uryasev, “Conditional value-at-risk for general loss distributions”, *Journal of Banking and Finance*, vol. 26, pp. 1443–1471, 2002.

- [92] S. Nadarajah, BoZhang, and S.Chan, "Estimation methods for expected shortfall", *Quantitative Finance*, vol. 14, no. 2, pp. 271-291, 2014.
- [93] J.W. Taylor, "Using Exponentially Weighted Quantile Regression to Estimate Value at Risk and Expected Shortfall", *Journal of Financial Econometrics*, vol. 6, pp. 382-406, 2008.
- [94] O. Scaillet, "Nonparametric estimation and sensitivity analysis of expected shortfall", *Mathematical Finance*, vol. 14, pp. 115-129, 2004.
- [95] S.X. Chen, "Nonparametric estimation of expected shortfall", *Journal of Financial Econometrics*, vol. 6, pp. 87-107, 2008.
- [96] C.H. Han, W.H. Liu, and T.Y. Chen, "VaR / CVaR Estimation under Stochastic Volatility Models", 2013.[Online]. Available: <http://ssrn.com/abstract=2202032>. Accessed on: January 11, 2013.
- [97] D. Guégan, and X. Zhao, "Alternative modeling for long term risk", *Quantitative Finance*, vol. 14, issue 12, pp. 2237-2253, 2014.
- [98] H. B. Soltane, A. Karaa, and M. Bellalah, "Conditional VaR using GARCH-EVT approach: Forecasting Volatility in Tunisian Financial Market", *Journal of Computations & Modelling*, vol.2, no.2, pp. 95-115, 2012.
- [99] М.З. Згуровський, и Н.Д. Панкратова, *Основи системного аналізу*. Київ, Україна: BHV, 2007.
- [100] M.Z. Zgurovsky, and N.D. Pankratova, *System analysis: Theory and Applications*. Berlin: Springer, 2007.
- [101] Nataly Zrazhevskaja "Application of VaR and CVaR risk measures in the Financial Time Series Analysis," *Workshop: Risk Management Approaches in Engineering Applications*, 2015. [Online] Available: http://www.ise.ufl.edu/uryasev/conferences_seminars/workshop-the-fundamental-quadrangle-of-risk-in-optimization-and-estimation/.
- [102] N.G. Zrazhevskaja, and A.G. Zrazhevskij, "Classification of methods for risk measures VaR and CVaR calculation and estimation", *Системні дослідження та інформаційні технології*, no.3. с. 118-125, 2016. DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2016.3.11

- [103] Н.Г. Зражевська, "Використання VAR та CVAR при моделюванні ризику в часових рядах", на *16-й Міжнарод. конф. SAIT*, Київ, 2014, с. 92.
- [104] N. Zrazhevskya, "Construction and application of the classification scheme of dynamic risk measures estimating", *Eureka: Physics and Engineering*, no.5, pp. 67-80, 2016. DOI: 10.21303/2461-4262.2016.00162.
- [105] Н.Г. Зражевська, "Структурна схема вибору методів оцінювання динамічних мір ризику VAR і CVAR", на *VII Всеукр. наук.-практ. конф. за міжнародною участю «Інформатика та системні науки»*, Полтава, 2016, с. 128. [Электронный ресурс]. Доступно: <http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/3007>.
- [106] П.І. Бідюк, і М.М. Коновалюк, "Визначення величини ризику VaR на основі оцінок параметрів моделі стохастичної волатильності", *Системні дослідження та інформаційні технології*, , no.3, pp. 85-94, 2012.
- [107] П.І. Бідюк, "Системний підхід до прогнозування на основі моделей часових рядів", *Системні дослідження та інформаційні технології*, no.3. с. 88-110, 2003.
- [108] П.І. Бідюк, В.Д. Романенко, і О.Л. Тимошук, *Аналіз часових рядів*, Київ, Україна: НТУУ «КПІ», 2013. [Електронний ресурс]. Доступно: <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/862>.
- [109] F.X. Diebold, "Comparing Predictive Accuracy, Twenty Years Later: A Personal Perspective on the Use and Abuse of Diebold–Mariano Tests", *Journal of Business & Economic Statistics*, vol.33, no.1, pp. 1-24, 2015.
- [110] J.H. Cochrane, "How big is the random walk in GNP?", *Journal of Political Economy*, no. 96, pp. 893–920, 1988.
- [111] W.A. Brock, J. A. Scheinkman, W.D. Dechert, and B. LeBaron, "A test of independence based on the correlation dimension", *Econometric Review*, vol. 15, no. 3, pp. 197–235, 1996.
- [112] C. Acerbi; D. Tasche, "Expected Shortfall: a natural coherent alternative to Value at Risk", *Economic Notes*, vol. 31, pp. 379–388, 2002.

- [113] F. Peracchi, and A. V. Tanase, "On estimating the conditional expected shortfall", *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, no. 24, pp. 471-493, 2008.
- [114] И.С. Меньшиков, и Д.А. Шеин, *Рыночные риски, модели и методы*. Москва: Вычислительный Центр РАН, 2000.
- [115] A. Azzalini, "A class of distributions which includes the normal ones", *Scandinavian Journal of Statistics*, vol.12, pp.171-178, 1985.
- [116] M. Bernardi, "Risk measures for skew normal mixtures", *Statistics & Probability Letters*, vol. 83, no. 8, pp. 1819-1824, 2013.
- [117] A. Azzalini, A. Capitanio, "Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew t-distribution", *Journal of the Royal Statistical Society, B*, 65, pp.367-389, 2003.
- [118] K. Yu, A.K. Ally, S. Yang, and D.J. Hand, "Kernel quintile-based estimation of expected shortfall", *Journal of Risk*, vol.12, pp.15-32.
- [119] J. McNeil, "Extreme value theory for risk managers", *Internal Modelling and CAD*, vol. II, pp. 93-113, 1999.
- [120] S. Coles, *An introduction to statistical modeling of extreme values*, Springer-Verlag London Ltd, 2001.
- [121] J. Danielsson, L. de Haan, L. Peng, and C. de Vries, "Using a bootstrap method to choose the sample fraction in tail index estimation", *Journal of Multivariate Analysis*, vol. 76, no. 2, pp. 226–248, 2001.
- [122] S. Ou, D. Yi, "Robustness analysis and algorithm of expected shortfall based on extreme-value block minimum model", in *Proceedings of the 2009 International Conference on Business Intelligence and Financial Engineering*, 2009, pp. 288-292.
- [123] J. Rinker, "Peak-over-Threshold Method for Extreme Values", Duke University, 22, 2013, pp. 1-6.

- [124] G. Gonzalez-Rivera, Tae-Hwy Lee, and E. Yoldas, “Optimality of the RiskMetrics VaR Model”, *Finance Research Letters*, vol. 4, issue 3, pp. 137-145, 2007.
- [125] D.G. McMillan, and D. Kambouroudis, “Are RiskMetrics forecasts good enough? Evidence from 31 stock markets”, *International Review of Financial Analysis*, vol. 18, issue 3, pp. 117-124, 2009.
- [126] J.W. Taylor, “Using Exponentially Weighted Quantile Regression to Estimate Value at Risk and Expected Shortfall”, *Journal of Financial Econometrics*, vol. 6, pp. 382-406. 2008.
- [127] R.F. Engle, and S. Magnelli, “CaViaR: Conditional Autoregressive Value at Risk by Quantile Regression”, NBER, Working paper, 7341, 1999.
- [128] P.H. Kupiec, “Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models”, *Journal of Derivatives*, vol. 3, no. 2, pp. 73-84, 1995.
- [129] P.F. Christoffersen, *Elements of financial risk management*, Academic Press, 2003.
- [130] A.J. McNeil, and R. Frey, “Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach”, *Journal of Empirical Finance*, vol.7, no. 3–4, pp. 271–300, 2000.
- [131] B. Efron, and R.J. Tibshirani, *An Introduction to the Bootstrap*, Chapman & Hall, 1993.
- [132] S. Uryasev, “Buffered Probability of Exceedance and Buffered Service Level: Definitions and Properties”, October 14, Research report #2014-3, 2014.
- [133] A. Mafusalov, S. Uryasev, “Buffered Probability of Exceedance: Mathematical Properties and Optimization Algorithms”, Research report 2014-1, 2014.
- [134] Н.Г. Зражевська, “Оптимізаційна модель для оцінювання параметрів Херста”, на *17-й Міжнарод. конф. SAIT*, Київ, 2015, с. 71.
- [135] Н.Г. Зражевська, ”Дослідження на сильну залежність фінансових рядів, що описують індекси фондових ринків”, на *XVI Міжнарод. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука*, Київ, 2015, с. 30.

- [136] Н.Г. Зражевська, “Прогнозування фінансових часових рядів на основі моделі FIGARCH”, на *Міжнарод. наук.-практ. конф. «Інформаційні технології, економіка та право: стан та перспективи розвитку» (ІТЕП-2015)*, Чернівці, 2015.
- [137] О.Г Зражевський, "Системний підхід до відновлення функціональних залежностей нестационарних часових рядів різної структури", дис. канд. наук, ННК "ІПСА" НТУУ "КПІ", Київ, 2011.
- [138] J. Durbin, "The fitting of time series models", *Review of the International Statistical Institute*, vol.28, pp. 233–244, 1960.
- [139] J. Jang, and G. Fu, "Transform approach for operational risk modeling: value-at-risk and tail conditional expectation", *Journal of Operational Risk*, vol. 3, no. 2, pp.45-61, 2008.
- [140] T.W. Korner, *Fourier Analysis*, Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1988.
- [141] D. Duffie, and J. Pan, "Analytical Value-at-Risk with jumps and credit risk", *Finance and Stochastics*, vol. 5, no.2, pp. 155-180, 2001.
- [142] A. Ramponi, "On a Transform Method for the Efficient Computation of Conditional V@R (and V@R) with Application to Loss Models with Jumps and Stochastic Volatility", *Methodology and Computing in Applied Probability*, vol. 18 issue 2, pp 575–596, 2016.
- [143] N. D. Pankratova, N. G. Zrazhevskaja, "Method of dynamic VaR and CVaR risk measures forecasting for long range dependent time series on the base of the heteroscedastic model", *Intelligent Control and Automation Journal*, vol. 8, no. 2, 2017, DOI: 10.4236/ica.2017.82010.
- [144] N. Zrazhevskaja, and A. Zrazhevsky, "Construction of prediction of dynamic risk measures VaR and CVaR for financial time series with different volatility", *European Journal of Basic and Applied Sciences*, vol. 4, no. 1, pp. 13-22, 2017.
- [145] Н.Г. Зражевська, “Оцінювання динамічних мір ризику VaR і CVaR для фондових індексів на основі гетероскедастичної моделі часового ряду”, на *18-ій Міжнарод.конф. SAIT*, Київ, 2016, с. 86.

- [146] Н.Г. Зражевська, “Моделювання і прогнозування мір ризику VaR і CVaR для часового ряду фондових індексів”, на *19-ій Міжнарод. конф. SAIT*, Київ, 2017, с. 163.
- [147] Н.Г. Зражевська, “Моделювання динамічних мір ризику VaR і CVaR для часового ряду фондового індексу Nikkei 225”, на *XVII Міжнарод. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука*, Київ, 2016, с. 76-78.
- [148] Tae-Hwy Lee, Y. Bao, and B. Saltoglu, "Evaluating predictive performance of value-at-risk models in emerging markets: a reality check", *Journal of Forecasting*, vol. 25, no. 2, pp. 101-128, 2006

Додаток А. Акти впровадження результатів дисертаційної роботи

ЗАТВЕРДЖУЮ

в.о. директора Інституту прикладного
системного аналізу Національного
технічного університету України
"Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського"
д.ф-м.н., доцент
П.О. Касьянов

" " "

АКТ

про впровадження результатів дисертаційної роботи

Зражевської Наталії Григорівни

«Методи і моделі прогнозування мір динамічних фондових ризиків»
у навчальний процес

Члени комісії у складі заст. директора Інституту прикладного системного аналізу Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського" (ІПСА) д.т.н., професора Романенко В.Д., д.т.н., професора кафедри Математичних методів системного аналізу ІПСА Бідюка П.І. склали цей акт про те, що у ІПСА при виконанні лабораторних та магістерських робіт для студентів зі спеціальності "Системний аналіз та управління" 8.080203 при викладанні курсу "Основи системного аналізу" впроваджені наступні результати, розроблені Зражевською Н.Г.:

- системний підхід до вирішення кількісного оцінювання ризиків в період нестабільного функціонування фінансової системи;
- алгоритми прогнозування волатильності часових рядів із сильною залежністю на основі методів оцінювання параметрів Херста та редукції системи лінійних рівнянь;
- комплекс модулів та програм в пакеті Matlab для прогнозування мір динамічних ризиків на основі методу згладжування автокореляційної функції.

Заступника директора
ІПСА д.т.н., професор

д.т.н., професор

 Романенко В.Д.

 Бідюк П.І.



Товариство з обмеженою відповідальністю "Н'ЮГРАУНД"
02095 м. Київ, вул. Княжий Затон, 16-А, к.99, тел. 2000443
ЄДРПОУ 33296552

Вих. № 20180219-01

ННК "Інститут прикладного
системного аналізу" Національного
технічного університету України
"Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського"

АКТ

про впровадження результатів дисертаційної роботи
Зражевської Наталії Григорівни
на тему "Моделювання і прогнозування мір динамічних ризиків VaR і CVaR"

Результати роботи Зражевської Н. Г. "Методи і моделі прогнозування мір динамічних фондових ризиків" у складі моделей, методів та програмних модулів були впроваджені при виконанні сумісних проектів NewGround LLC Ukraine з American Optimal Decisions, Inc., пов'язаних з оптимізацією діяльності фондових ринків.

При аналізі стабільності фондових ринків особливу роль відіграють міри ризику VaR та CVaR. Розроблені у роботі системи прийняття рішень використовуються фінансовими аналітиками при виборі оптимальних методів оцінювання. Запропоновані система тестів та розроблені програмні модулі використовуються для кількісного оцінювання можливих ризиків на ринках цінних паперів. Практичне значення одержаних у роботі результатів полягає також і в розробці запропонованого методу прогнозування мір динамічних ризиків- метод згладжування автокореляційної функції. Достатня гнучкість методу дозволяє застосовувати його до широкого кола даних.

Підтверджуємо, що впровадження запропонованого системного підходу до розв'язання проблеми оцінювання і прогнозування мір ризиків VaR і CVaR при виконанні ряду проектів, зокрема Case Study: Hedging Portfolio of Options, Case Study: VaR Optimization Retail Portfolio of Bonds, дозволило, по перше, спростити процедуру вибору методу прогнозування, а по друге, при певних, достатньо широких, обмеженнях на вхідні данні отримати якісні прогнозні оцінки із застосуванням запропонованого у роботі методу.

2018.02.19

Родін Є.С.
директор NewGround LLC



Додаток Б

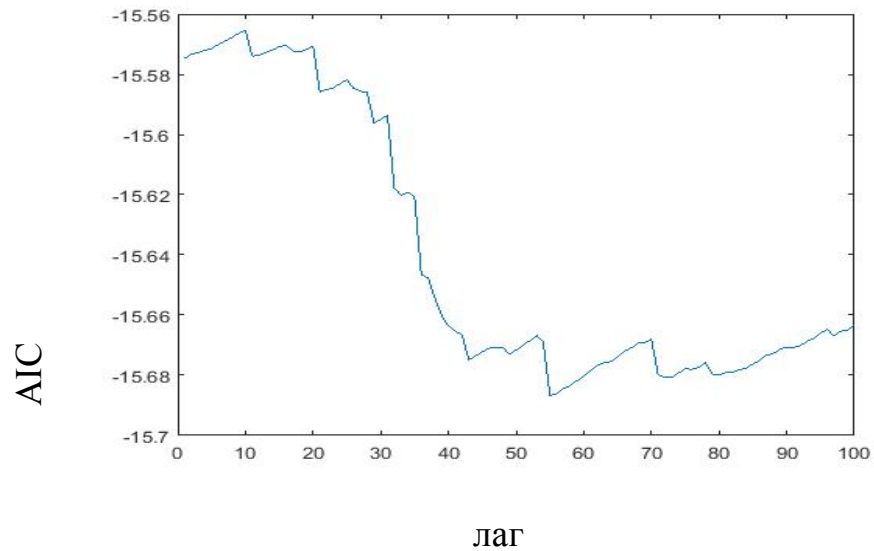
**Результати інформаційних критеріїв для визначення порядку
авторегресійної моделі для часового ряду РТС**

Рис.Б1. Значення статистики AIC в залежності від лага авторегресії

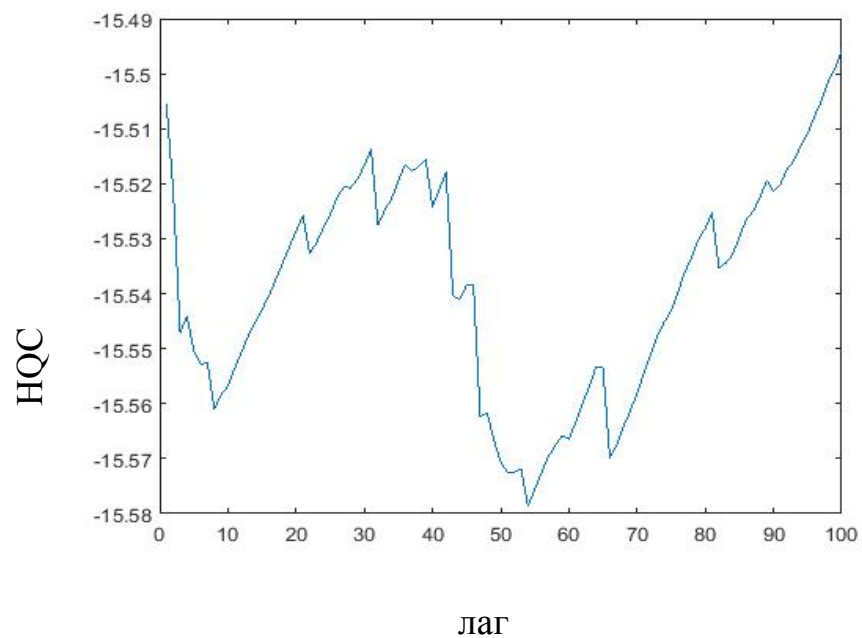


Рис.Б2. Значення статистики HQC в залежності від лага авторегресії

Додаток В

Програма у пакеті MATLAB для прогнозування дисперсії часового ряду за допомогою МЗАКФ:

Вхідні параметри:

simulatedData - значення часового ряду;

M - розмір початкового вікна, на якому будується модель;

step_pred - кількість значень, які одночасно прогнозуються;

num_steps - кількість кроків прогнозування;

acf_lag - кількість перших значень автокорреляційної функції, які розглядаються;

acf_point - кількість перших значень автокорреляційної функції в оптимізації, після яких відбувається згладження АКФ.

Вихідні параметри:

data_prediction - прогнозні значення дисперсії часового ряду;

H_optim_table - значення параметра Херста по всім вікнам;

estim_errors - залишки моделі (значення часового ряду поділені на корінь квадратний із прогнозних значень дисперсій);

estim_AR_data_res - змодельовані по моделі значення дисперсії часового ряду.

Текст програми:

```
function [data_prediction,H_optim_table,estim_errors,estim_AR_data_res] =
Prediction_AR_Alex(simulatedData,M,step_pred,num_steps,acf_lag,acf_point)
data_prediction=[];H_optim_table=[];
simulatedData = simulatedData-mean(simulatedData);
for steps=1:num_steps
    Data=simulatedData(1:M+(steps-1)*step_pred);
    Data_oos=simulatedData(M+(steps-1)*step_pred+1:M+(steps-
1)*step_pred+step_pred);
    square_data=(Data).^2;
    square_data_oos=(Data_oos).^2;
    ACF = autocorr_my(square_data, acf_lag);
```

```

ACF=abs(ACF(1:end));
y_data_full=log(ACF(1:acf_lag));
x_data_full=[ones(acf_lag,1),log([1:acf_lag]')];
y_data_in=y_data_full(1:acf_point);
x_data_in=x_data_full(1:acf_point,:);
y_data_out=y_data_full(acf_point+1:acf_lag);
x_data_out=x_data_full(acf_point+1:acf_lag,:);
kl=5:5;
    lamda = 0.1*kl;lamda_op=1-lamda;
problem_statement = sprintf('%s\n',...
    'Problem: problem_1, type = minimize',...
    'Objective: objective_meansquare',...
    [num2str(lamda) '*meansquare_out(matrix_out)'],...
    [num2str(lamda_op) '*variable_q(q)']);
iargstruc_arr(1)=matrix_pack('matrix_out',x_data_out,{ 'const','x1'},y_data_out);
[a,bint,r,rint,stats]=regress(y_data_in,x_data_in);
text={};
for i=1:size(y_data_in,1)
    iargstruc_arr(i+1)=matrix_pack(sprintf('matrix_in_%g',i),x_data_in(i,:),
    {'const','x1'},y_data_in(i));
    text{i}=sprintf('%s\n',...
    ['Constraint: <= ',num2str(mean(r.^2))],...
    ['meansquare(matrix_in_',num2str(i,')'],...
    '-variable(q)');
end

for i=1:size(y_data_in,1)
    problem_statement=sprintf('%s\n',...
    problem_statement,...
    text{i});
end

[solution_str, outargstruc_arr] = mpsg_solver(problem_statement, iargstruc_arr);
H_optim=(outargstruc_arr(4).values(3)+2)/2;
H_optim_table=[H_optim_table,H_optim];
ACF_estim=[];
for i=1:size(x_data_full,1)

ACF_estim=[ACF_estim;exp(outargstruc_arr(4).values(3)+outargstruc_arr(4).valu
es(2)*x_data_full(i,2))];
end

ACF_full=[1;ACF_estim(1:acf_lag)];
ACF_vector_1=ACF_full(1:end-1);

```

```

ACF_vector_2=ACF_full(2:end);
table_Tepliz=ACF_vector_1(toeplitz(1:size(ACF_vector_1,1)));
param_AR_estim = linsolve(table_Tepliz,ACF_vector_2);
param_AR_estim_my=param_AR_estim;
%%%%%% Prediction of AR
estim_AR_data=[];
loc=sort([1:acf_lag],'descend');
full_square_data=[square_data;square_data_oos];
for i=1:size(full_square_data,1)-acf_lag
    estim_AR_data=[estim_AR_data,(full_square_data(i:i+acf_lag-
1))*param_AR_estim(loc)];
end
estim_AR_data=[square_data(1:acf_lag);estim_AR_data'];
estim_AR_data=abs(estim_AR_data + mean(simulatedData));
data_prediction=[data_prediction;estim_AR_data(end-step_pred+1:end)];
estim_AR_data_res(steps).data = estim_AR_data;
estim_errors(steps).data=(Data./sqrt(estim_AR_data(1:end-step_pred)))';
end

```


Додаток Г

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. N. D. Pankratova, and **N. G. Zrazhevskaja**, “Model of Autocorrelative Function of Time Series with Strong Dependence”, *Journal of Automation and Information Sciences*, vol. 47, no. 10, pp. **1-12**, 2015. (Входить до наукометричної бази *ISI Thompson Science Citation Index, CAS, SCOPUS, PubMed, CrossRef* та ін.). Дисертантом запропоновано формалізацію, математичне обґрунтування і чисельну апробацію методу для моделювання АКФ на основі регресійного рівняння, параметри якого знаходяться з використанням оптимізаційної процедури.
2. **Н.Г. Зражевська**, “Метод згладженої автокореляційної функції для прогнозування варіації гетероскедастичних часових рядів”, *Системні дослідження та інформаційні технології*, no.3. с. 97-108, 2015. (Входить до наукометричних баз *DOAJ, Index Copernicus, РИНЦ* та ін.)
3. **N. G. Zrazhevskaja**, and A. G. Zrazhevskij, “Classification of methods for risk measures VaR and CVaR calculation and estimation”, *Системні дослідження та інформаційні технології*, no.3. с. 118-125, 2016. (Входить до наукометричних баз *DOAJ, Index Copernicus, РИНЦ* та ін.). Дисертантом виконана побудова процедури прийняття рішення щодо вибору методу оцінювання статичних мір ризику, формалізація і чисельна апробація класифікаційної схеми оцінювання *VaR* та *CVaR*.
4. **N. Zrazhevskaja**, “Construction and application of the classification scheme of dynamic risk measures estimating”, *Eureka: Physics and Engineering*, no.5, pp. 67-80, 2016, DOI: 10.21303/2461-4262.2016.00162. (Входить до наукометричних баз *Worldcat, JIF, DRJI, I2OR, SIS, GIF, ResearchBib, Index Copernicus, РИНЦ* та ін.)

5. N.D. Pankratova, and **N. G. Zrazhevskaja**, "Method of dynamic VaR and CVaR risk measures forecasting for long range dependent time series on the base of the heteroscedastic model", *Intelligent Control and Automation Journal*, vol. 8, no.2, pp. 126-138, 2017, doi: [10.4236/ica.2017.82010](https://doi.org/10.4236/ica.2017.82010). (Входить до наукометричних баз *Academic Journals Database*, *CrossRef*, *i-Scolar*, *NSTL*, *Yale University Library*, *Worldcat* та ін.). Дисертантом запропоновано формалізацію, математичне обґрунтування і чисельну апробацію методу моделювання і прогнозування мір динамічних ризиків МЗАКФ.
6. **N. Zrazhevskaja**, and A. Zrazhevsky, "Construction of prediction of dynamic risk measures var and cvar for financial time series with different volatility". *European Journal of Basic and Applied Sciences*, vol. 4, no. 1, pp. 13-22, 2017. (Входить до наукометричних баз *Google Scholar*, *ROAD Directory of Open Access Scholarly Resources*, *UK*, *Cabells Directories* та ін.). Дисертантом виконано чисельну реалізацію МЗАКФ та аналіз результатів прогнозування для рядів різної волатильності.
7. **Н.Г. Зражевська**, "Використання VAR та CVAR при моделюванні ризику в часових рядах", на *16-й Міжнарод. конф. SAIT*, Київ, 2014, с. 92.
8. **Н.Г. Зражевська**, "Дослідження на сильну залежність фінансових рядів, що описують індекси фондових ринків", на *XVI Міжнарод. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука*, Київ, 2015, с. 30.
9. **Н.Г. Зражевська**, "Оптимізаційна модель для оцінювання параметрів Херста", на *17-й Міжнарод. конф. SAIT*, Київ, 2015, с. 71.
10. **Н.Г. Зражевська**, "Прогнозування фінансових часових рядів на основі моделі FIGARCH", на *Міжнарод. наук.-практ. конф. «Інформаційні технології, економіка та право: стан та перспективи розвитку» (ІТЕП-2015)*, Чернівці, 2015.

11. **Nataly Zrazhevskya**, “Application of VaR and CVaR risk measures in the Financial Time Series Analysis,” *Workshop: Risk Management Approaches in Engineering Applications*, 2015. [Online] Available: http://www.ise.ufl.edu/uryasev/conferences_seminars/workshop-the-fundamental-quadrangle-of-risk-in-optimization-and-estimation/.
12. **Н.Г. Зражевська**, ”Моделювання динамічних мір ризику VaR і CVaR для часового ряду фондового індексу Nikkei 225”, на *XVII Міжнарод. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука*, Київ, 2016, с. 76-78.
13. **Н.Г. Зражевська**, ”Оцінювання динамічних мір ризику VaR і CVaR для фондових індексів на основі гетероскедастичної моделі часового ряду”, на *18-й Міжнарод.конф. SAIT*, Київ, 2016, с. 86.
14. **Н.Г. Зражевська**, “Структурна схема вибору методів оцінювання динамічних мір ризику VAR і CVAR”, на *VII Всеукр. наук.-практ. конф. за міжнародною участю «Інформатика та системні науки»*, Полтава, 2016, с. 128.
15. **Н.Г. Зражевська**, ” Моделювання і прогнозування мір ризику VaR і CVaR для часового ряду фондових індексів”, на *19-й Міжнарод.конф. SAIT*, Київ, 2017, с. 163.